LIMIT FUNGSI ALJABAR

A. Pengertian Limit

$\lim_{x \to a} f(x)$ = **L**

L adalah batas nilai f(x) untuk x mendekati a (dari arah kiri/limit kiri: $\lim_{x \to a^-} f(x)$ dan arah kanan/limit kanan: $\lim_{x \to a^+} f(x)$)

1. Perhatikan fungsi f(x) = $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$, maka nilai f(x) untuk x mendekati 1 sebagai berikut :

x mendekati 1 dari kiri — x mendekati 1 dari kanan

x	0,98	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,02	1,02	1,04
F(x)	1,98	1,99	1,999	$\frac{0}{0} =$ tak tentu	2,001	2,01	2,02	1,98	2,04

Nilai f(x) mendekati 2 — Nilai f(x) mendekati 2

Untuk x yang mendekati 1 dari arah kiri,nilai f(x) mendekati 2 keadaan seperti ini dikatakan limit kiri dari x mendekati 1 adalah 2,dan dapat ditulis dengan notasi: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

Untuk x yang mendekati 1 dari arah kanan,nilai f(x) mendekati 2 keadaan seperti ini dikatakan limit kanan dari x mendekati 1 adalah 2,dan dapat ditulis dengan notasi : $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$

Dengan demikian dikatakan : $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

2. Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{x}{x - 2}$ maka nilai f(x) untuk x mendekati 2 sebagai berikut :

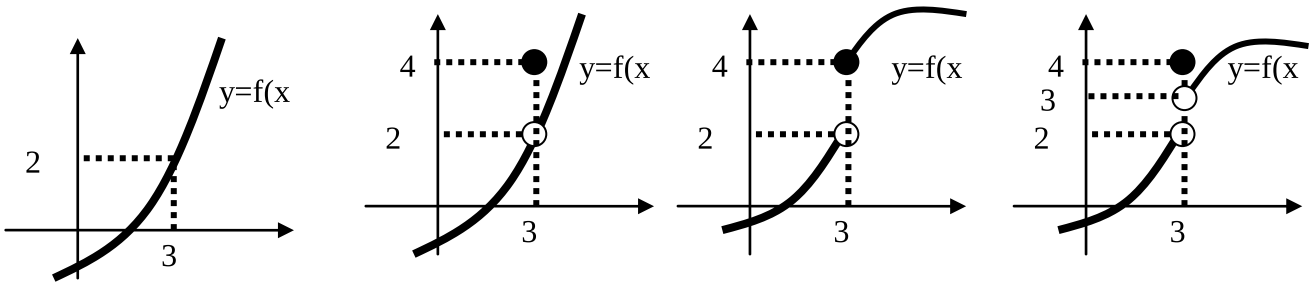
x mendekati 2 dari kiri — x mendekati 2 dari kanan

x	1.9	1.99	1.999	2	2.0001	2.001	2.01	2.0001
F(x)	-19	-199	-1999	$\frac{2}{0} =$ tak terdefinisi	20001	2001	201	20001

Nilai f(x) mendekati - ∞ — Nilai f(x) mendekati ∞

Untuk x yang mendekati 2 dari arah kiri,nilai f(x) mendekati -∞ dapat ditulis dengan notasi: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$, dan Untuk x yang mendekati 2 dari arah kanan,nilai f(x) mendekati ∞ dapat ditulis dengan notasi : $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$. Dengan demikian dikatakan : $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x - 2}$ = tak ada (tak ada limit)

3. Perhatigan grafik fungsi berikut :



(a) (b) (c) (d)

(a)

F(3) = 2

- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$,

maka :

$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$

f(x) kontinu di x = 3

(b)

F(3) = 4

- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$,

maka :

$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$

f(x) diskontinu di x = 3

(c)

F(3) = 4

- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$,

maka :

$\lim_{x \to 3} f(x)$ = tak ada

f(x) diskontinu di x = 3

(d)

F(3) = 4

- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$
- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 3$,

maka :

$\lim_{x \to 3} f(x)$ = tak ada

f(x) diskontinu di x = 3

Dari gambar diatas dapat disimpulkan bahwa :

f(x) kontinu (grafiknya berkesinambungan) di x = a apabila memenuhi syarat :

1. f(a) terdefinisi
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ ada
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

B. Limit Fungsi Aljabar untuk x mendekati a

Menyelesaikan soal : $\lim_{x \to a} f(x)$ adalah dengan mengganti x dengan a atau f(a) ,

- jika f(a) terdefinisi maka $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- Jika f(a) tak terdefinisi , maka $\lim_{x \to a} f(x)$ = tak ada (tak ada limit)
- Jika $f(a) = \frac{0}{0}$ (tak tentu), maka masing-masing pembilang dan penyebut difaktorkan dan salah satu faktornya adalah pembuat nol untuk x = a, kemudian coret faktor pembuat nol yang sama dan substitusikan x dengan a yang selanjutnya merupakan penyelesaian limit tersebut.
  (***Bila sulit dalam memfaktorkan, maka sebelum memfaktorkan gunakan pemisalan atau kalikan sekawan untuk menghilangkan tanda akar sehingga mudah untuk memfaktorkan***).

Contoh

Selesaiakanlah !

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$	2. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$	4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-\sqrt{6-x}}$
5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x^2+3}}$	6. $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}-2}$
7. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$	8. Diketahui $f(x)=\begin{cases} 5x+2 & untuk \quad x<0 \\ \frac{x^2-4}{x^2-x-2} & untuk \quad 0\le x<2 \\ 3-4x & untuk \quad x\ge 2 \end{cases}$ Apakah f(x) kontinu disetiap titik?

Sifat- Sifat Limit Fungsi:

Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ masing-masing ada (terdefinisi), maka

a. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

b. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x) \text{ x } \lim\limits_{x\to a} g(x)$

c. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

d. $\lim\limits_{x\to a} f^n(x)=\left\{\lim\limits_{x\to a} f(x)\right\}^n$

Contoh :

1. Jika $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$ dan $\lim_{x \to 2} g(x) = 3$ tentukan nilai

$$\lim_{x \to 2} \frac{f^3(x) + \sqrt{2g(x)+11}}{g^2(x).f(x)}$$

2. Hitunglah $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{4x+1}}{x^2-x-2}}$

Latihan 1

1. $\lim_{x\to 1/2} \frac{3+2x}{5-x} =$	2. $\lim_{x\to 2} \frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1} =$
3. $\lim_{x\to 6} \frac{x}{x-3} =$	4. $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} =$
5.3.. $\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} =$	6.8. $\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{8-2x}}{x-2} =$

7. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} =$	8. $\lim\limits_{x \to 36} \dfrac{x^2 - 36x}{x\sqrt{x} - 6x} =$
9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - x} =$	10. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{9x^2 - 1}{3x - 1} =$
11. $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x}{x - 3} =$	12. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} =$
13. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 6}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} =$	14. $\lim\limits_{x \to 2\sqrt{2}} \dfrac{16 + 2x^2}{x^2 - \sqrt{2}\,x} =$

15. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+9}}{x + 3} =$	16. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4} \right) =$
17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2x+4} - \sqrt{4-2x}}{6x} =$	18. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^3+2}{x^3+3x^2+x-1} =$
19. $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{27} - x^3}{2x^2 - 6} =$	20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^2}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{1-3x}} =$
21. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^2-81}{3 - \sqrt{x}} =$	22. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{6x-4}{x^2+x+4} =$

23. $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}} \dfrac{x^4 - 4}{\sqrt{8} - x^2\sqrt{2}} =$	24. $\lim\limits_{x \to a\sqrt{a}} \dfrac{a^3 - x^2}{a^2 + x^2} =$
25. $\lim\limits_{x \to 25} \dfrac{\sqrt{x} - 5}{50 - 2x} - =$	26. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{2}{3-x} - \dfrac{8}{3+2x-x^2} \right) =$
27. $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{4\sqrt[3]{x} + 8}{16+2x} =$	28. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2\sqrt{10} - \sqrt{2x}}{x+5} =$
29.24. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)x}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x-2}} =$	30. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - 16} =$

31. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{4-x}{2\sqrt{x^2-16}} =$	32. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{3x-4}-\sqrt{4x-6}} =$
33. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2-3x^3}{(x^2+x)(4x-x^2)} =$	34. Jika : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+ax-b}{x^2+2x-3} = 2$, maka $a^2-b^2 =$
35. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x+1-\sqrt{x^2+1}}{x^2+3x} =$	36. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} + \sqrt[3]{\dfrac{5x^3-40}{x^2+x-6}} - 4}{2+\sqrt{\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x^2-4}}} =$
37. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-x\sqrt{x}-8}{x+\sqrt{x}-6} =$	38. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{2x}{x^2-9} - \dfrac{2x-2}{x^2-2x-3}\right) =$

39. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} =$	40. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{x^2 + x + 4}}{1 - \sqrt{2x + 1}} =$
41. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt[4]{5x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{5}} =$	42. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 - \sqrt{x + 3\sqrt{x}}}{x^2 - 1} =$
43. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x+3}\left(\dfrac{1}{x+5} + \dfrac{1}{x+1}\right) =$	44. $\lim\limits_{k \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{k^2} - 2\sqrt[3]{k} + 1}{(k-1)^2}$
45. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + x^3}{1 + \sqrt[3]{x}} =$	46. $\lim\limits_{x \to 81} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 3}{\sqrt{x} - 9} =$

47. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2x^3+3ax^2-5a^3}{x^3-a^3} =$	48. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} =$
49. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{x^4-4}{x^3-3x+\sqrt{2}} =$	50. Jika nilai dari $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{ax-\sqrt{x}+b}{x-4} = \dfrac{3}{4}$, maka nilai a + b adalah ....