

DEFFERNSIAL atau TURUNAN FUNGSI ALJABAR

A. Pengertian Turunan dari fungsi $y = f(x)$

- Laju rata-rata perubahan fungsi dalam interval antara $x = a$ dan $x = a + h$ adalah :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{dengan syarat : } a \text{ di dalam domain } f(x))$$

- Laju sesaat perubahan $f(x)$ pada $x = a$ atau limit dari laju rata-rata perubahan fungsi antara $x = a$ dan $x = a + h$ saat h mendekati 0 adalah :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ disebut dengan } \mathbf{turunan f(x) pada } x = a$$

Sehingga **turunan fungsi $f(x)$ pada sembarang titik x adalah:** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

- Notasi Turunan.

Nilai dari turunan adalah fungsi dari x yang ditunjukkan oleh simbol-simbol:

$$D_x y = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y = y' = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} : \mathbf{turunan pertama}$$

Sedangkan Nilai turunan $f(x)$ pada titik tertentu a adalah : $f'(a)$ atau $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$

- Subuah fungsi dikatakan **diferensiabel (dapat didiferensiasikan)** pada $x = a$ jika turunan fungsi itu **ada (terdefinisi)** pada titik tersebut.

Contoh :

Dengan menggunakan definisi turunan , tentukan turunan dari fungsi $f(x) = \sqrt{x}$

$$\mathbf{Jawab : } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

Latihan 1

Dengan menggunakan definisi turunan, tentukan turunan fungsi berikut :

1. $f(x) = 5$	2. $f(x) = 2x^3$, kemudian tentukan nilai turunan $f(x)$ untuk $x = -1$
3. $f(x) = x^2 + a^2$	4. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

5. $f(x) = (3x + 5)^2$	6. $f(x) = \sqrt{2x+3}$
7. $f(x) = \frac{4}{x^2}$	8. $f(x) = x\sqrt{x-1}$
9. $f(x) = \frac{2x-3}{3x+4}$	10. $f(x) = \frac{1}{x-1}$, kemudai tentukan juga $f'(2)$

B. Aturan-aturan dari turunan (rumus- rumus)

Jika U dan V adalah fungsi dalam x, sedangkan k dan n adalah konstanta, maka dari definisi turunan diperoleh rumus sebagai berikut:

No	y atau f(x)	y' atau $f'(x)$ atau $\frac{dy}{dx}$
1	k (konstanta)	0
2	kx	k
3	x^n (x berpangkat n)	nx^{n-1}
4	kx^n	knx^{n-1}
5	$U \pm V$ (penjumlahan / pengurangan fungsi)	$U' \pm V'$
6	U^n (fungsi berpangkat n)	$nU^{n-1} \cdot U'$
7	$U \cdot V$ (perkalian antara fungsi)	$U' \cdot V + U \cdot V'$
	$U \cdot V \cdot W$	$U' \cdot V \cdot W + U \cdot V' \cdot W + U \cdot V \cdot W'$
8	$\frac{U}{V}$ (pembagian antara fungsi)	$\frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$
9	$y = f(u)$ dan $u = g(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ (aturan berantai)
	$y = f(u)$ dan $u = g(v)$ $v = h(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$
10	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ (komposisi fungsi)	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Langkah-langkah penyelesaian turunan:

- Perhatikan Soal apakah soal perlu disederhanakan atau dijabarkan
- Perhatikan bentuknya : apakah $U + V$, U^n , $U \cdot V$, $\frac{U}{V}$, turunan berantai, atau komposisi fungsi. Kemudian gunakan rumus yang sesuai dan rumus dasar (1- 4)

Contoh :

Tentukan turunan pertama atau $f'(x)$ fungsi berikut :

<p>1. $f(x) = x^2(x+3)$ Jawab :(soal dijabarkan terlebih dahulu) $f(x) = x^3 + 3x^2$ (bentuk U + V) $f'(x) = 3x^2 + 3 \cdot 2x^1$ $f'(x) = 3x^2 + 6x$</p>	<p>2. $f(x) = \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{x\sqrt{x}}$ Jawab :(jika dipandang sebagai bentuk $\frac{U}{V}$ soal lebih lama diselesaikan, sehingga soal disederhanakan terlebih dahulu) $f(x) = \frac{2x^3}{x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} + \frac{4}{x\sqrt{x}}$ $f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} - x^{-1} + 4x^{-\frac{3}{2}}$ (bentuk U -V +W) $f'(x) =$</p>
<p>3. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4x-5}}$ Jawab :(bentuk $\frac{U}{V}$ soal lebih lama diselesaikan, sehingga soal disederhanakan terlebih dahulu) $f(x) = 3(4x-5)^{-\frac{1}{2}}$ (bentuk U^n) $f'(x) =$</p>	<p>4. $f(x) = (4x-3)^3(3x+4)^4$ Jawab :(bentuk : U.V) $U = (4x-3)^3$ (bentuk U^n) $U' =$ $V = (3x+4)^4$ (bentuk U^n) $V' =$ $f'(x) =$</p>
<p>5. $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-3}$ Jawab :(bentuk : $\frac{U}{V}$) $U = x^2 + 2$ $U' = \dots$ $V = x^2 - 3$ $V' = \dots$ $f'(x) =$</p>	<p>6. $y = \frac{1}{u}$, $u = \sqrt{3-2v}$, dan $v = (1-x^2)^3$ Jawab :(bentuk : turunan berantai)</p>
<p>7. Jika $g(x) = x^2 + 3$, $h(x) = 2x + 1$ dan $f(x) = (g \circ h)(x)$ Jawab :(bentuk : komposisi fungsi)</p>	<p>8. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{10x-1}}$, tentukan juga nilai dari $f'(1)$</p>

<p>9. $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5$. Tentukan pula turunan ke 3 dari $f(x)$ atau $f'''(x) =$</p>	<p>10. $f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{1 - x}$. Tentukan juga rumus turunan ke n</p>
---	---

Latihan 2

Tentukan $f'(x)$ atau y' atau $\frac{ds}{dt}$ sesuai soal di bawah ini

1. $f(x) = -3x^7$	2. $f(x) = (x - 5)(x + 7)$
3. $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - 7x^{\frac{1}{2}} - 5x$	4. $f(x) = \frac{3a^2}{x^2} - \frac{a}{3x^4}$
5. $f(x) = (3x + 4)(8 - x)$	6. $f(x) = (2x - 1)^2$
7. $y = (\sqrt{x} - 5)^2$	8. $y = (9x - 4)(x - 1)(3 - x)$
9. $y = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$	10. $y = \frac{3x+1}{2x\sqrt{x}}$
11. $s = 5\sqrt[5]{t^2}$	12. $s = \frac{3\sqrt{t}}{t}$
13. $f(x) = \frac{3\sqrt{x}}{x^2}$	14. $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2}$

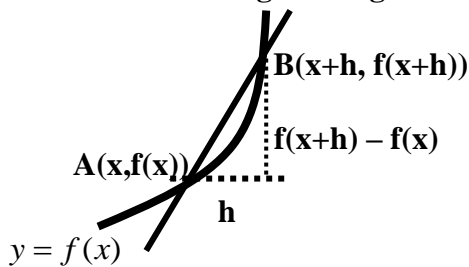
15. $f(x) = \frac{1}{2}x^{-4}$	16. $f(x) = -\frac{1}{4}x^{\frac{-1}{4}}$
17. $s = t^4 - 5t^2 - 7$	18. $f(x) = x^2\sqrt{2} - x\sqrt{3}$
19. $f(x) = (x^{\frac{1}{3}} + 3)(x^{\frac{1}{2}} - 7)$	20. $f(x) = (x - 2)^3$
21. $f(x) = x^{\frac{1}{5}}(x^{\frac{5}{3}} - \sqrt{x})$	22. $f(x) = x\sqrt{x}(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
23. $f(x) = (x - 2)^2(3 - x)$	24. $f(x) = \frac{(2x^2 - 3)(x + 5)}{x^3}$
25. $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}2$	26. $y = \frac{\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} + 4}{\sqrt[3]{x}}$
27. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$	28. $y = (1 - 5x)^6$
29. $y = (3x - x^3 + 1)^4$	30. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 1}}$

31. $y = (x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$	32. $f(x) = x\sqrt{3 - 2x^2}$
33. $y = (x^2 + 3)^4(2x^3 - 5)^3$	34. $y = x^5(2x - 1)^3(2 - x)^2$
35. $f(x) = \frac{3x + 2}{2x + 3}$	36. $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$
37. $y = 2x^2\sqrt{2 - x}$	38. $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^5$
39. $s = \frac{t}{\sqrt{1 + 4t^2}}$	40. $y = \left(\frac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}\right)^4$

<p>41. $f(x) = \sqrt[3]{6x + \sqrt{4x+1}}$</p>	<p>42. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}}$</p>
<p>43. $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$. Tentukan pula y''</p>	<p>44. $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$</p>
<p>45. $y = \frac{u-1}{u+1}$ dan $u = \sqrt{x}$</p>	<p>46. $y = \sqrt{u}$, $u = v(3-2v)$, dan $v = x^2$</p>
<p>47. $y = \frac{2x+3}{x\sqrt{4x+1}}$</p>	<p>48. $x = y\sqrt{1-y^2}$</p>
<p>49. $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$. Tentukan pula nilai dari $\frac{dy}{dx} \Big _{x=1}$</p>	<p>50. $f(x) = \left(\frac{x\sqrt{2x+3}}{(x-1) \cdot \sqrt[3]{3x-1}} \right)^{\frac{1}{2}}$ tentukan nilai dari $f'(3)$</p>

C. PENERAPAN TURUNAN

1. Menentukan gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik (x,y)



Gradien garis AB adalah : $m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,

Jika h mendekati 0 , maka titik B berhimpit dengan titik A, sehingga garis AB merupakan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $A(x,y)$.

Jadi **gradien garis singgung** $y = f(x)$ di titik $A(x,y)$ adalah

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad (A \text{ disebut titik singgung})$$

Sedangkan untuk menentukan persamaan garis singgung gunakan rumus persamaan garis dengan gradien m dan melalui titik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Catatan : dua garis sejajar : gradiennya sama $m_1 = m_2$

Dua garis tegak lurus : $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Contoh :

1. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^3 + 1$ di titik yang berabsis 2.

Jawab :

Untuk menentukan persamaan garis harus dicari titik yang dilewati dan gradiennya.

Titik : absis 2 , $x = 2$, maka $y = 2^3 + 1 = 9$, titik yang dilalui $(2,9)$

Gradien garis singgung $m = f'(x) = 3x^2$ **di titik (2,9)**

$$m = 3 \cdot 2^2 = 12$$

Persamaan garis singgung : $y - 9 = 12(x - 2)$ atau $y = 12x - 15$

2. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^3 - 3x^2$ yang tegak lurus garis $x - 3y + 2 = 0$

Jawab :

Gradien garis $x - 3y + 2 = 0$ adalah $m_1 = \dots$, dan gradien garis singgung $m = \dots$

Titik singgung : $m = f'(x)$

$$\dots = \dots$$

$$\dots = 0$$

$$x = \dots$$

$$y = x^3 - 3x^2$$

$$y = \dots$$

titik singgung (\dots , \dots)

Persamaan garis singgung : \dots

3. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = \sqrt{x}$, yang ditarik dari titik $(0,1)$

Jawab : (petunjuk : misalkan titik singgungnya (a,b) , tentukan nilai a terlebih dulu)

Latihan 1

1. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = 7 - 6x - 6x^2$, di titik $(0, 7)$	2. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = \frac{1}{8}x^3$ di titik $(4, 8)$
3. Tentukan persamaan garis singgung $y = x^3 + 2x - 1$ di titik yang berabsis = 2	4. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = (2x - 3)^2 - 1$ yang tegak lurus dengan garis $2y + x - 11 = 0$
5. Tentukan persamaan garis singgung $y = 4x^3 - 13x^2 + 4x - 3$ di titik $(0, -3)$	6. Tentukan persamaan garis singgung $y = \frac{x}{x+1}$ di titik $(-2, 2)$
7. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = \frac{8}{\sqrt{x}}$ di titik $(4, 4)$	8. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = \frac{\alpha}{x} + 1$, di titik $(1, 6)$

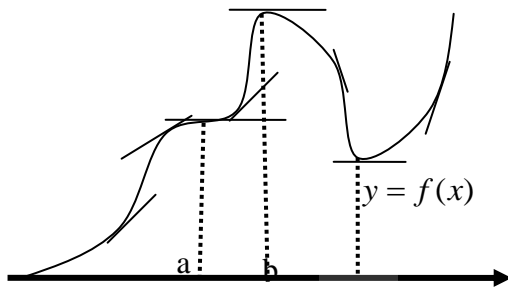
<p>9. Tentukan persamaan garis singgung $y = (a + \frac{b}{x})\sqrt{x}$, di titik $(4, 8)$, sejajar dengan garis $y = 2x$</p>	<p>10. Tentukan persamaan garis singgung pada $y = x^2 + 2\sqrt{x} - 1$ di titik yang berabsis 1</p>
<p>11. Sebuah kurva dengan persamaan $y = ax^2 + bx$ kurva tersebut melalui titik $(2, 2)$ dan garis singgung kurva di $x = 3$ adalah 9, tentukan persamaan kurva tersebut</p>	<p>12. Tentukan persamaan garis singgung gradien $y = x^2 - 4x + 4$ yang gradient nya = 2</p>
<p>13. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 4x - 3x^2$ di titik potong kurva dengan sb x</p>	<p>14. Gradien garis singgung kurva $y = \frac{1}{x^2}$ adalah $-\frac{1}{4}$ tentukan titik singgung nya</p>
<p>15. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = (4x - 3)(4 - 2x)$ di titik $(2, 0)$</p>	<p>16. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = \frac{x-1}{x+1}$ yang tegak lurus dengan garis singgung kurva $y = x^2 - 4x + 2$ di titik $(1, -1)$</p>

<p>17. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ yang sejajar dengan sumbu x</p>	<p>18. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 4ax^2$, di titik $(a, 2a)$</p>
<p>19. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = \sqrt[3]{x}$ di titik yang berordinat 2</p>	<p>20. Garis singgung kurva $y = x^2 + 2$ di titik $(-1, 3)$ dan $(2, 6)$ berpotongan pada titik yang terletak pada sumbu x, tentukan titik potong tersebut</p>
<p>21. Buktikan persamaan garis singgung pada kurva parabola $y^2 = 4px$ di titik $A(x_1, y_1)$ adalah $yy_1 = 2p(x + x_1)$</p>	<p>22. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^3 + 5$ yang sejajar dengan garis $x + 3y = 2$</p>
<p>23. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x(x - 1)(x - 2)$ di titik potong dengan sumbu x.</p>	<p>24. Persamaan garis singgung kurva $y = 4x^2$ di titik $(-1, 4)$ memotong sumbu x di titik P dan memotong sumbu y di titik Q, tentukan panjang garis PQ tersebut.</p>

<p>25. Persamaan garis singgung kurva $y = (x^3 + 1)^2$ dititik dengan absis = 1 adalah</p> <p>A. $12x + y + 8 = 0$ B. $y - 12x - 8 = 0$ C. $12x + y - 8 = 0$ D. $12y - x - 8 = 0$ E. $12x - y - 8 = 0$</p>	<p>26. Garis singgung parabola $y = x^3 - 4x$ dititik (1, - 3) membentuk sudut dengan sb x positif sebesar</p> <p>A. 60^0 B. 75^0 C. 90^0 D. 135^0 E. 150^0</p>
<p>27. Sebuah kurva $y = ax^2 + b$ melalui (2,2) dan gradient garis singgung kurva di $x = 3$ adalah 9, persamaan kurva tersebut adalah</p> <p>A. $y = 2x^2 - 3x$ B. $y = 2x^2 + 3x$ C. $y = -2x^2 + 3x$ D. $y = 3x^2 - 2x$ E. $y = 3x^2 + 2x$</p>	<p>28 $f(x) = 2\cos 4x$, garis yang tegak lurus dengan garis singgung kurva $f(x)$ di $x = \frac{\pi}{12}$ mempunyai gradient</p> <p>A. $-3\sqrt{3}$ B. $-\frac{1}{12}\sqrt{3}$ C. $\frac{1}{12}\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$ E. 4</p>
<p>29. Persamaan garis singgung pada kurva $y = \frac{27}{\sqrt{5x-1}}$ di titik yang berabsis 2 adalah ...</p> <p>A. $5x + 2y - 28 = 0$ B. $5x - 2y - 8 = 0$ C. $2x - y + 5 = 0$ D. $x + 2y - 20 = 0$ E. $x - 2y + 16 = 0$</p>	<p>30. Jika titik potong garis $2x - y + 1 = 0$ dengan $3x - y - 5 = 0$ merupakan titik singgung kurva $y = -6x^2 + x^3$ dengan garis l, maka gradient garis l adalah ...</p> <p>A. 12 B. 18 C. 24 D. 36 E. 40</p>
<p>31. garis $l \equiv y = mx + n$ sejajar dengan garis $g \equiv 2x + 5$. jika garis l menyinggung kurva $y = x\sqrt{x} - x$ maka $m + n = \dots$</p> <p>A. -4 B. -2 C. 2 D. 4 E. 6</p>	<p>32. Garis singgung kurva $y = \cos x + \sin x$ dititik dengan absis $\frac{\pi}{3}$. Gradient garis yang tegak lurus garis singgung kurva tersebut adalah....</p> <p>A. $\sqrt{3} + 1$ B. $\sqrt{3} - 1$ C. $2(\sqrt{3} + 1)$ D. $2(\sqrt{3} - 1)$ E. -1</p>
<p>33. Persamaan garis singgung kurva $y = (4x - 3)^2 - 1$ yang tegak lurus garis $x + 2y - 11 = 0$ adalah</p> <p>A. $16y + 32x + 41 = 0$ B. $16y - 32x + 41 = 0$ C. $16y - 32x - 41 = 0$ D. $32x + 16y + 41 = 0$ E. $32x - 16y - 41 = 0$</p>	<p>34 Persamaan garis yang tegak lurus garis singgung kurva $y = \frac{1}{4x}$, dititik yang berabsis 1 adalah</p> <p>A. $16x + 4y + 15 = 0$ B. $16x - 4y + 15 = 0$ C. $16x - 4y - 15 = 0$ D. $-16x - 4y + 15 = 0$ E. $-16x + 4y - 12 = 0$</p>

2. Menentukan interval dimana fungsi naik, fungsi turun, dan fungsi stasioner

Jika $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ maka fungsi naik
 Jika $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ maka fungsi turun



Pada interval :

- $x < a$, $a < x < b$, dan $x > c$: fungsi $f(x)$ naik, perhatikan garis-garis singgungnya *miring ke kanan*, berarti gradien garis singgungnya positif atau $m > 0$ atau $f'(x) > 0$
- $b < x < c$: fungsi turun, perhatikan garis-garis singgungnya *:miring ke kiri*, berarti gradien garis singgungnya negatif atau $m < 0$ atau $f'(x) < 0$
- pada titik $x = a$, $x = b$, dan $x = c$: fungsi tidak naik ataupun tidak turun (stasioner). Perhatikan garis singgungnya :sejajar sumbu X atau gradiennya nol atau $m = 0$ atau $f'(x) = 0$.
 Di $x = a$, maka $f(a)$ disebut nilai beloh horizontal, sedang titik $(a, f(a))$ disebut titik belok horisontal
 Di $x = b$, maka $f(b)$ disebut nilai balik maksimum, sedang titik $(b, f(b))$ disebut titik balik maksimum
 Di $x = c$, maka $f(c)$ disebut nilai balik minimum, sedang titik $(c, f(c))$ disebut titik balik minimum di
 Ke tiga titik di atas disebut sebagai jenis-jenis nilai stasioner, dan titik stasioner

Dari keterangan diatas , kita dapat mengambil kesimpulan tentang fungsi $y = f(x)$ sebagai berikut :

1. Untuk menentukan dalam interval mana fungsi $f(x)$ naik syarat nya : $f'(x) > 0$
2. Untuk menentukan dalam interval mana fungsi $f(x)$ turun syarat nya : $f'(x) < 0$
3. Untuk menentukan nilai stasioner dan titik stasioner , syaratnya : $f'(x) = 0$, sedangkankan jenis stasioner di lihat dari sketsa gariknya

Contoh :

1. Diketahui fungsi $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 12x + 2$
 - a. Tentukan interval dimana fungsi tersebut naik
 - b. Tentukan interval dimana fungsi turun
 - c. tentukan nilai stasioner dan jenisnya
 - d. Tentukan titik stasioner dan jenisnya.

Jawab :

- a. $f(x)$ naik bila $f'(x) > 0$

$$12x^2 + 18x - 12 > 0$$

$$6(2x^2 + 3x - 2) > 0$$

$$6(2x - 1)(x + 2) > 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ atau } x = -2$$

$$\begin{array}{c} + \quad | \quad - \quad | \quad + \quad f'(x) \\ -2 \quad \quad \quad \frac{1}{2} \end{array}$$

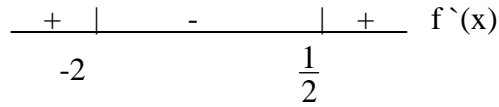
Maka $f(x)$ naik pada interval $x < -2$ atau $x > \frac{1}{2}$

b. $f(x)$ turun syarat nya : $f'(x) < 0$

$$6(2x - 1)(x + 2) < 0$$

$$6(2x - 1)(x + 2) > 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ atau } x = -2$$

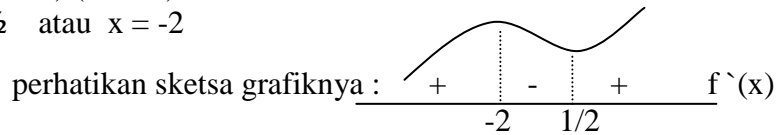


Maka $f(x)$ turun pada interval $-2 < x < \frac{1}{2}$

c. Nilai stasioner, jika $f'(x) = 0$

$$6(2x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ atau } x = -2$$



$x = \frac{1}{2}$, maka $f(\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{2})^3 + 9(\frac{1}{2})^2 - 12(\frac{1}{2}) + 2 = -5/4$ nilai balik minimum.

Sedangkan $(\frac{1}{2}, -5/4)$ titik balik minimum

$x = -2$, maka $f(-2) = 4(-2)^3 + 9(-2)^2 - 12(-2) + 2 = 30$ nilai balik maksimum.

Sedangkan $(-2, 30)$ titik balik maksimum

Latihan 2

Soal no 1 sampai dengan 10. Tentukan interval dimana fungsi naik dan fungsi turun

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 9$	2. $f(x) = 25 - 4x^2$
3. $f(x) = x^3$	4. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$
5. $f(x) = 2x^2 - 5x^2 + 4x - 1$	6. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$

7. $f(x) = 4x^4 - 4x^2$	8. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$
9. $f(x) = x^4 - 2x^3$	10. $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 4$
11. Tunjukan fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3x + 8$ Tidak pernah naik	12. Tunjukan fungsi $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 3$ Tidak pernah turun
13. Tunjukan fungsi $f(x) = x^3 + 2x^2 + 8x + 6$ Selalu naik	14. Tunjukan fungsi $f(x) = -3x^3 - 6x^2 - 3x + 7$ Selalu turun
15. tunjukan fungsi $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x + 5$ selalu turun	16. tentukan batas nilai a , agar fungsi $f(x) = -x^3 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 8$, selalu turun untuk semua nilai x bilangan real

Tentukan nilai stasioner, titik stasioner dan jenisnya dari fungsi berikut

17. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 9$

18. $f(x) = 25 - 4x^2$

19. $f(x) = x^3$

20. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

21. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

22. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$

23. $f(x) = 4x^4 - 4x^2$

24. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

$$25. f(x) = (x^2 - 4)^2$$

$$26. f(x) = (x - 1)^5$$

$$27. f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$$

$$28. f(x) = (x - 4)^4(x + 3)^3$$

$$29. f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$30. f(x) = x^3 + \frac{48}{x}, x \neq 0$$

3. Menggambar grafik polinomial (fungsi pangkat tinggi)

Langkah langkah nya adalah sebagai berikut :

1. Menentukan titik potong kurva dengan sumbu x (bila tidak sulit) dan sumbu y
2. Menentukan titik stasioner dan jenis nya
3. Titik belok (dengansyarat $f''(x) = 0$)
4. Menentukan titik titik bantu

Contoh :

Gambarlah sketsa grafik : $y = x^4 - 4x^3 + 15$

1. Titik potong dengan sumbu y : $x = 0$ $y = 15$ (0,15)

2. Titik stasioner : $y' = 0$

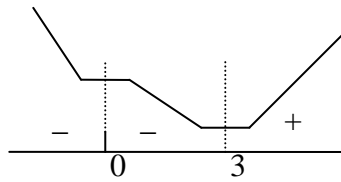
$$4x^3 - 12x^2 = 0$$

$$4x^2(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad y = 15 \quad (0,15)$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 3 \quad y = -12$$



3 titik belok $y'' = 0$

$$12x^2 - 24x = 0$$

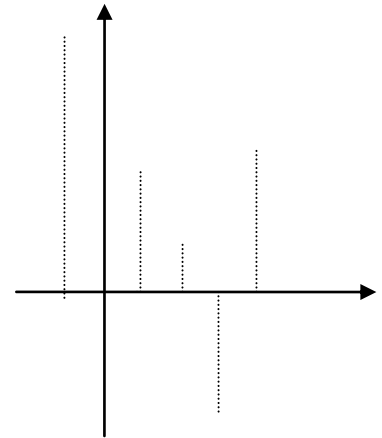
$$12x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad y = 15 \quad (0,15)$$

$$x_2 = 2 \quad y = 7 \quad (2,7) \quad \text{Titik belok}$$

4 Titik Bantu (pilih disekitar titik stasioner)

x	-1	1	4
y	20	12	15



Latihan 3

1. Gambarlah grafik fungsi $y = 4x - x^3$

2. Gambarlah grafik untuk $y = 4x^2 - x^4$

<p>3. . Gambarlah grafik dari $y = 5x^3 - 3x^5 + 10$</p>	<p>4. Gambarlah grafi dari $y = x^3 - 2x^2 + 3$</p>
<p>5. Gambarlah grafik dari $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$</p>	<p>6. Gambarlah grafik dari $y = x^4 - 4x^3 - 12x^2$</p>

4. Menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi $y = f(x)$ pada interval tertutup $a \leq x \leq b$

Langkah-langkah :

1. Tentukan $f(a)$ dan $f(b)$
2. Tentukan nilai stasioner yang terletak pada interval $a \leq x \leq b$
3. Tentukan nilai-nilai maksimum atau minimum dari $f(a)$, $f(b)$, dan nilai stasioner

Contoh:

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 12$ pada interval $-2 \leq x \leq 2$

Jawab :

$$f(-2) = -8 - 12 + 18 + 12 = 10$$

$$f(2) = 8 - 12 - 18 + 12 = -10$$

Nilai stasioner :

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$3(x-3)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 3 \quad \text{di luar interval}$$

$$x_2 = -1 \quad f(-1) = -1 - 3 + 9 + 12 = 17$$

Jadi Nilai maksimum = 17

Nilai minimum = -10

Latihan 4

<p>1. Tentukan nilai maksimum dan minimum $f(x) = x^4 - 16x^2 + 10$ pada interval $-1 \leq x \leq 3$</p>	<p>2. Tentukan nilai maksimum dan minimum $f(x) = x^4 - 16x^2 + 10$ pada interval $-1 \leq x \leq 3$</p>
<p>3. Tentukan nilai maksimum dan minimum $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$ pada interval $0 \leq x \leq 6$</p>	<p>4. Tentukan nilai maksimum dan minimum $f(x) = 3x^5 - 10x^3$ pada interval $-2 \leq x \leq 1$</p>

5. Menggunakan turunan untuk perhitungan percepatan dan kecepatan

Kecepatan rata rata dari gerak benda P dalam dalam waktu antara t dan $t + \Delta t$ detik ditentukan dengan

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

jika Δt mendekati 0 maka kecepatan pada saat t ditulis sebagai berikut :

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Jadi kecepatan benda yang dilambangkan dengan V pada saat t (satuan nya m / det)dapat ditulis :

$$V = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$

Selanjutnya bahwa laju perubahan jarak terhadap waktu disebut kecepatan atau $V(t)$ dan laju perubahan kecepatan terhadap waktu disebut percepatan atau $a(t)$ pada saat t (dengan satuan nya m / det²)Yang dirumuskan :

$$a = \frac{dV}{dt} = V'(t) = s''(t)$$

Contoh :

Panjang lintasan sebuah partikel yang bergerak pada garis lurus dirumuskan dengan persamaan $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ (s dalam meter dan t dalam detik) tentukan

- Panjang lintasan pada saat $t = 2$ detik
- Rumus kecepatan V (dalam variabel t)
- Rumus percepatan a (dalam variabel t)
- Kecepatan benda pada saat $t = 2$ detik
- Percepatan benda pada saat $t = 3$ detik
- Pada saat t berapakah benda itu berhenti
- Pada waktu t manakah percepatan benda = 0

Jawab :

Latihan 5

<p>1. Sebuah motor bergerak sepanjang garis lurus , jarak yang ditempuhnya dirumuskan dengan persamaan $s = t^3 - 2t^2 + 4t$, hitunglah</p> <ol style="list-style-type: none">kecepatan rata rata benda dalam interval $t = 2$ detik sampai dengan $t = 3$ detikkecepatan benda pada saat $t = 3$ detikpercepatan benda pada saat $t = 2$ detik	<p>2. Sebuah benda meluncur pada suatu bidang miring dengan persamaan gerak $s = 12t^2 + 6t$, dimana s dalam meter dan t dalam detik tentukan :</p> <ol style="list-style-type: none">kecepatan benda setelah bergerak 3 detikpercepatan benda setelah 2 detik
<p>3. Sebuah benda bergerak sepanjang garis horizontal dengan jarak $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 12t$, tentukan percepatan benda pada saat kecepatannya 20 m / det</p>	<p>4. Lintasan benda yang bergerak di rumuskan dengan $s(t) = 3t^2 + 2t^3$, tentukan kecepatan benda pada saat percepatannya 30 m / det²</p>

6. **Menyelesaikan permasalahan tentang maksimum dan minimum.**

Langkah :

1. Apabila dari soal tidak ada variabelnya, maka membuat pemisalan $x = \dots$, dan $y = \dots$
2. Yang di maksimum atau minimum dinyatakan dalam fungsi dengan satu variabel.
(dengan memperhatikan hubungan antara variabel-variabelnya antara lain : diketahui, perbandingan dalam kesebangunan, rumus pythagoras, konsep letak titik pada kurva atau yang lainnya)
3. Turunan fungsi $= 0$. dari persamaan ini diperoleh nilai variabelnya.
4. Jawab pertanyaan yang sesuai.

Contoh :

1. Diketahui dua buah bilangan x dan y sehingga berlaku $2x - y = 8$. Tentukan dua bilangan tersebut dengan hasil kali tekecil , kemudian tentukan hasil kali terkecilnya.

2. Dalam sebuah kerucut tegak dengan jari-jari 4 cm dan tingginya 6 cm, akan dibuat tabung yang alasnya berhimpit dengan alas kerucut. Tentukan ukuran tabung yang mempunyai volume terbesar.

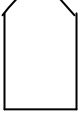
3. Diantara grafik $y = x^2 + 1$ dan garis $y = 5$ dibuat persegi panjang yang salah satu sisinya terletak pada garis tersebut. Tentukan luas persegi panjang terbesar!

4. Dalam sebuah bola berjari-jari 8. dibuat kerucut lingkatan tegak yang puncaknya pada bola. Tentukan ukuran kerucut yang volumenya terbesar.

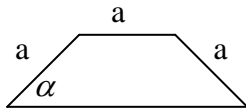
Latihan 6

<p>1. Diketahui jumlah dua bilangan positif adalah 24, Tentukan hasil kali maximumnya</p>	<p>2. Suatu persegi panjang mempunyai keliling 100 cm, maka luas terbesar dapat terjadi</p>
<p>3. Sehelai karton berbentuk persegi panjang dengan lebar 5 dm, dan panjang 8 dm, pada keempat pojok karton dipotong persegi dengan sisinya x cm, dari bangun yang didapat dibuat kotak tanpa tutup. Tentukan ukuran kotak agar volumenya maximum.</p>	<p>4. Diketahui sebuah kotak tanpa tutup, alasnya persegi. luas permukaan kotak 192cm^2. Tentukan ukuran kotak agar volumenya maksimum</p>

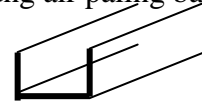
<p>5. Jumlah dua bilangan positif adalah 20, Tentukan jumlah kuadrat minimum bilangan – bilangan itu</p>	<p>6. Suatu kaleng berbentuk silinder tanpa tutup, jika volumenya 20 cm^3, Tentukan ukuran kaleng tersebut agar luas permukaannya minimum</p>
<p>7. Dari selembar seng dengan luas 400 cm^2, akan dibuat sebuah kaleng berbentuk silinder dengan tutup, Tentukan jari-jari alas silinder agar isinya maximum</p>	<p>8. ABCD adalah persegi dengan sisi 6 cm, E pada AB sehingga $BE = 2x \text{ cm}$ dan F pada BC sehingga $BF = 2x \text{ cm}$. Tentukan luas maksimum $\triangle DEF$</p>
<p>9. Suatu kebun berbentuk persegi panjang, salah satu sisinya berbatasan dengan sungai, keliling kebun tersebut akan dipagari dengan kawat sepanjang 48 meter. Jika sisi yang berbatasan dengan sungai tidak dipagari, Tentukan luas maximum kebun tersebut</p>	<p>10. Perusahaan mobil memproduksi x unit mobil perhari. Biaya produksi dinyatakan dengan fungsi $P(x) = x^2 + 30x + 50$ juta rupiah. Sedang harga jual per satu unit mobil adalah 150 dalam jutaan rupiah. Tentukan keuntungan maksimum perusahaan tersebut perhari</p>
<p>11. Jika suatu proyek akan diselesaikan dalam x</p>	<p>12. Bila produksi x radio perhari adalah (0,25</p>

<p>hari, maka biaya proyek per hari menjadi $(2x + \frac{100}{x} - 40)$ ribu rupiah, Tentukan biaya proyek minimum</p>	<p>$x^2 + 35x + 25$), sedang harga jual persatuan memenuhi fungsi $(50 - 0,5x)$. Tentukan besar produksi agar keuntungan maksimum akan diperoleh setiap hari</p>
<p>13. Panjang suatu balok adalah dua kali lebarnya, jika luas permukaannya 300 cm^2. Tentukan volume maksimum nya</p>	<p>14. Dalam sebuah bola padat yang berjari-jari 3 cm dibuat kerucut tegak, , Tentukan volume maksimum kerucut yang terjadi</p>
<p>15. Sebuah kerucut tegak dengan jari-jari alasnya 6 cm, tingginya 9 cm, didalam kerucut dibuat tabung, alas dan titik pusat tabung berimpit dengan alas dan titik pusat kerucut. Tentukan volume maksimum dari tabung tersebut</p>	<p>16. Sebuah pintu berbentuk seperti gambar di bawah ini atasnya setengah lingkaran, jika keliling pintu = p. agar luas pintu maksimum Tentukan lebar pintu.</p> 

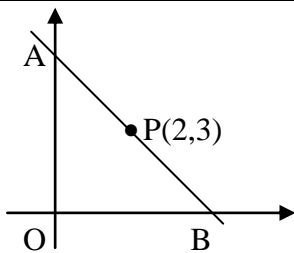
17. Sebuah trapesium sama kaki seperti pada gambar. Tentukan besar sudut α agar luasnya maksimum



18. Selembar seng yang lebarnya 40 cm . akan dibuat talang air, dengan melipat bagian-bagian tepinya dengan tinggi yang sama. Tentukan tinggi talang air, sehingga dapat menampung air paling banyak.

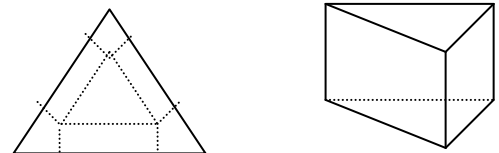


19.



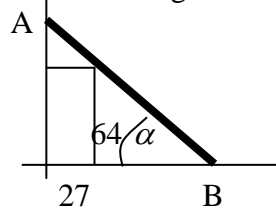
Perhatikan gambar di atas. Tentukan gradien garis AB agar luas segitiga AOB maksimum.

20. Sebuah karton berbentuk segitiga sama sisi yang panjangnya 36 cm, akan dibuat prisma segitiga beraturan tanpa tutup dengan memotong pojok-pojoknya. Agar memperoleh prisma yang mempunyai volume terbesar, Tentukan tinggi prisma



21. Sebuah kawat panjangnya 24 cm dipotong menjadi 2 bagian. Bagian pertama dibuat lingkaran dan yang ke dua dibuat persegi. Tentukan panjang masing-masing potongan kawat agar jumlah luas lingkaran dan persegi paling kecil.

22. Perhatikan gambar berikut:



Garis AB menyentuh kotak yang lebarnya 27 cm dan panjangnya 64 cm. Tentukan nilai $\sin \alpha$ agar panjang AB minimum

7. Menggunakan turunan untuk perhitungan limit fungsi x mendekati a dari bentuk tak tentu (Aturan L' Hospital)

Jika $f(a) = 0$ dan $g(a) = 0$, Maka $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Contoh

Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3x}{2x - 2}$

Jawab :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3x}{2x - 2} = \frac{0}{0}$ (bentuk tak tentu): , maka

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3x}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 3}{2} = \frac{6 \cdot 1 - 3}{2} = \frac{3}{2}$

Latihan 7

Tentukan nilai dari :

1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}} =$	4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 3x}{\tan 2x + \sin x} =$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2} =$	5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - ax}{x^3 - a^3} =$	6. $\lim_{x \rightarrow 90^\circ} \frac{1 + \cos 2x}{\cos x} =$
7. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-h)^3 - 1}{h} =$	12. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} =$

<p>8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{16 - 5x}}{2x} =$</p>	<p>13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x} =$</p>
<p>9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 8x}{x^3 + 4x} =$</p>	<p>14. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^4 - 2^4}{8h} =$</p>
<p>10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x - 2} - \sqrt{4x - 3}}{x - 1} =$</p>	<p>15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan x} =$</p>
<p>11. $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{25 - x}{5 - \sqrt{x}} =$</p>	<p>16. $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27} =$</p>