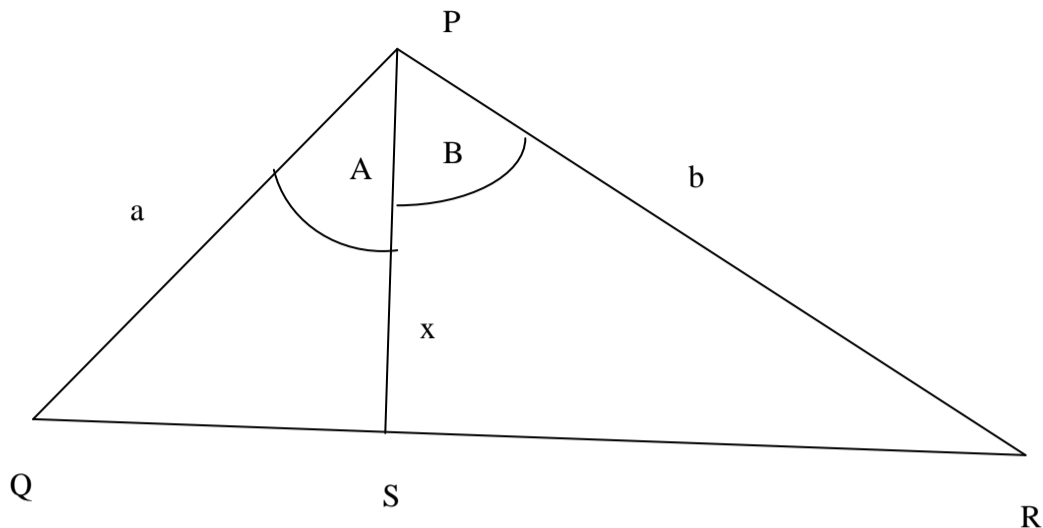


TUGAS DISKUSI : RUMUS SINUS DAN COSINES JUMLAH DAN SELISIH SUDUT

Perhatikan segitiga PQR di bawah ini PS tegak lurus QR dan panjang sisi PQ= a; PR= b, sudut SPQ = A dan sudut SPR = B



- A. Buktikan rumus $\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$ dengan langkah berikut :
1. Gunakan perbandingan trigonometri untuk menyatakan
 - a. x dalam a dan sudut A ; $x = \dots\dots$

 - b. x dalam b dan sudut B; $x = \dots\dots$
 2. Gunakan rumus luas segitiga ABC : $L = \frac{1}{2} a b \sin C$, untuk menghitung
 - a. luas segitiga PQR =

 - b. Luas segitiga PQS, kemudian gantikan nilai x yang diperoleh pada 1b

 - c. Luas segitiga PSR, kemudian gantikan nilai x yang diperoleh pada 1b
 3. Nyatakan Luas segitiga PQR dalam segitiga PQS dan PSR
Luas segitiga PQR = Luas segitiga PQS Luas segitiga PSR, kemudian tuliskan hasil pada nomor 2 ke masing-masing luas segitiga tersebut untuk membuktikan rumus

B. Dengan menggunakan pola rumus A dan rumus sudut berelasi carilah rumus-rumus $\sin(A - B)$; $\cos(A + B)$; $\cos(A - B)$; $\tan(A + B)$; dan $\tan(A - B)$ dengan cara berikut :

1. $\sin(A - B) = \sin(A + (-B))$

2. $\cos(A + B) = \sin(90 + (A + B)) = \sin((90 + A) + B)$

3. $\cos(A - B) = \cos(A + (-B))$

4. $\tan(A + B) = \frac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)}$ (setelah dijabarkan masing-masing suku dibagi dengan $\cos A \cdot \cos B$)

5. $\tan(A - B) = \tan(A + (-B))$

C. Rumus sudup rangkap

1. Temukan rumus di bawah ini dengan menggunakan rumus sebelumnya dan mengganti $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ atau $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

1. $\sin(2A) = \sin(A + A)$

2. $\cos(2A) = \cos(A + A)$

3. $\tan(2A) = \tan(A + A)$

2. Temukan rumus di bawah ini dengan menggunakan rumus sebelumnya ($\sin 2A$; $\cos 2A$, dan $\tan 2A$) dan mengganti $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ atau $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

1. $\sin(3A) = \sin(2A + A)$

2. $\cos(3A) = \cos(2A + A)$

3. $\tan(3A) = \tan(2A + A)$

3. Dari rumus : $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ dan $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ nyatakan $\sin A$ dan $\cos 2A$ dan $\sin A$ ke dalam $\cos 2A$,
Kemudian temukan rumus $\cos \frac{1}{2} A$, $\sin \frac{1}{2} A$, dan $\tan \frac{1}{2} A$ ke dalam sudut A

Kesimpulan : Rumus Jumlah dan selisih sudut

$$* \cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

$$* \cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$

$$* \sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$$

$$* \sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$$

$$* \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$$

$$* \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$$

Latihan 1

| | |
|--|---|
| <p>1. Diketahui $\sin x = \frac{3}{5}$ dan $\cos y = \frac{5}{13}$, x dan y sudut lancip. Tentukan nilai dari</p> <p>a. $\sin(x + y)$ b. $\sec(y - x)$ c. $\tan(x - y)$</p> <p>Jawab :</p> | <p>2. Tentukan nilai dari</p> <p>a. $\sin 55^\circ \cdot \cos 25^\circ - \sin 25^\circ \cdot \cos 55^\circ$ b. $\cos 128^\circ \cdot \cos 172^\circ - \sin 128^\circ \cdot \sin 172^\circ$ c. $\frac{1 - \tan 36^\circ \cdot \tan 24^\circ}{\tan 36^\circ + \tan 24^\circ}$</p> <p>Jawab :</p> |
| <p>3. Tentukan nilai dari</p> <p>a. $\sin 70^\circ \cdot \sin 110^\circ - \sin 200^\circ \cdot \cos 340^\circ$ b. $\cos 72^\circ \sin 102^\circ + \sin 72^\circ \cos 78^\circ$ c. $\frac{\tan 35^\circ + \tan 190^\circ}{1 - \cot 55^\circ \cdot \tan 10^\circ}$</p> <p>Jawab :</p> | <p>4. Diketahui $\sin(A + B) = \frac{4}{5}$ dan $\cos(A - B) = \frac{7}{25}$, jika (A-B) dan (A+B) adalah sudut lancip, tentukan nilai dari</p> <p>a. $\sin(2A)$ b. $\sec(2B)$</p> <p>Jawab :</p> |
| <p>5. Diketahui $\tan P = 2$ dan $\sin Q = -\frac{3}{5}$, Jika P dan Q terletak pada kuadran yang sama tentukan nilai</p> <p>a. $\cos(P + Q)$ b. $\cot(P - Q)$</p> <p>Jawab :</p> | <p>6. Hitung nilai dari</p> <p>a. $\sin 75^\circ$ b. $\cos 105^\circ$ c. $\cot 15^\circ$ d. $\operatorname{cosec} 255^\circ$</p> <p>Jawab :</p> |

| | |
|--|--|
| <p>7. Diketahui $\sin(A+B) = \frac{1}{4}$ dan $\sin(A-B) = \frac{1}{5}$. Tentukan Nilai $\tan A \cdot \cot B$! Jawab :</p> | <p>8. Diketahui $\cos(x-y) = \frac{2}{5}$ dan $\cos(x+y) = \frac{1}{5}$, Tentukan nilai dari $\tan x \cdot \tan y$ Jawab :</p> |
| <p>9. Diketahui $\tan A = \frac{1}{3}$, $\tan B = \frac{1}{5}$, $\tan C = \frac{1}{7}$, dan $\tan D = \frac{1}{8}$. jika A, B, C dan D sudut lancip, tentukan besar sudut $(A+B+C+D)$! Jawab :</p> | <p>10. Diketahui $\cos(A+B) = \frac{2}{5}$ dan $\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{10}$. Tentukan nilai dari a. $\cos A \cdot \cos B$ b. $\sin(A-B)$ Jawab :</p> |
| <p>11. Diketahui segitiga ABC, siku-siku di C dan $\sin A \cdot \sin B = \frac{2}{5}$. Tentukan nilai $\tan(A-B)$! Jawab :</p> | <p>12. Jika $\sin(45+x) = 3 \sin(45-x)$. Tentukan nilai dari $\cot x$ dan $\sin x$! Jawab :</p> |
| <p>13. Jika $\tan(45^\circ + A) = 4 \tan(45^\circ - A)$. Tentukan nilai $\tan A$? Jawab :</p> | <p>14. Diketahui $x + y = 30^\circ$, dan $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{3}$. Tentukan nilai dari a. $\cos x \cdot \sin y$ b. $\tan(x-y)$ Jawab :</p> |
| <p>15. Diketahui Segitiga ABC $\cos A = \frac{1}{3}$ dan $\cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tentukan nilai $\cos C$! Jawab :</p> | <p>16. Diketahui $x - y = 30^\circ$ dan $\cos y = 2 \cdot \cos x$. Tentukan $\tan x \cdot \cot y$ Jawab :</p> |

| | |
|--|--|
| <p>17. Diketahui segitiga ABC siku-siku di A, dan $\cos B \cdot \cos C = \frac{1}{6}$, tentukan nilai $\sin(B - C)$ Jawab :</p> | <p>18. Jika $\tan(3x+2y) = 3$ dan $\tan(3x-2y) = 2$. Tentukan besar sudut x! Jawab :</p> |
| <p>19. Diketahui segitiga ABC sudut A tumpul, $\sin A = \frac{1}{3}$ dan $\cos B = \frac{3}{4}$, Tentukkan nilai $\cot C$? Jawab :</p> | <p>20. Sederhanakan $\frac{\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) - \sin(x+y) \cdot \sin(x-y)}{\sin(x+y) \cdot \cos(x-y) + \cos(x+y) \cdot \sin(x-y)}$ Jawab :</p> |
| <p>21. Sederhanakan $\frac{\sin(a-b)}{\tan a - \tan b}$ Jawab :</p> | <p>22. Diketahui $\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)} = \frac{3}{4}$ dan $a + b = 45^\circ$ tentukan nilai $\tan a + \tan b$ Jawab :</p> |
| <p>23. Buktikan bahwa dalam segitiga ABC berlaku a. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ b. $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C$ Jawab :</p> | <p>24. Jika $A + B + C = 90^\circ$ Buktikan bahwa : $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan A \tan C = 1$ Jawab :</p> |

Kesimpulan : Rumus sudut rangkap

1. * $\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A$

$$\begin{aligned} * \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 2 \cos^2 A - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 A \end{aligned}$$

$$* \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

2. * $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

* $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

$$* \tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

Konsep Rumus :

Sudut 2A diubah menjadi A (setengahnya)

Konsep Rumus :

Sudut 3A diubah menjadi A (sepertiganya)

Latihan 2

| | |
|---|---|
| <p>1. Hitunglah nilai dari</p> <p>a. $2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$</p> <p>b. $3 \sin 22.5^\circ \cdot \cos 22.5^\circ$</p> <p>c. $4 \cos 67 \frac{1}{2}^\circ \cdot \sin 67 \frac{1}{2}^\circ$</p> <p>d. $\frac{2 \tan 75^\circ}{1 - \tan^2 75^\circ}$</p> <p>Jawab :</p> | <p>2. Hitung Nilai dari</p> <p>a. $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$</p> <p>b. $2 \cos^2 75^\circ - 1$</p> <p>c. $1 - 2 \sin^2 112 \frac{1}{2}^\circ$</p> <p>d. $4 \cos^2 22,5^\circ - 3$</p> <p>Jawab :</p> |
| <p>3. Hitunglah nilai dari</p> <p>a. $3 \sin 15^\circ - 4 \sin^3 15^\circ$</p> <p>b. $3 \cos 20^\circ - 4 \cos^3 20^\circ$</p> <p>c. $\frac{3 \tan 50^\circ - \tan^3 50^\circ}{1 - 3 \tan^2 50^\circ}$</p> <p>Jawab :</p> | <p>4. Hitung Nilai dari</p> <p>a. $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$</p> <p>b. $2 \sin 105^\circ \cdot \cos 255^\circ$</p> <p>c. $5 \cos 345^\circ \cdot \cos 285^\circ$</p> <p>Jawab :</p> |
| <p>5. Diketahui $\sin x = \frac{3}{5}$, x sudut lancip, tentukan nilai dari</p> <p>a. $\sin 2x$</p> <p>b. $\cos 3x$</p> <p>c. $\tan 4x$</p> <p>Jawab :</p> | <p>6. Hitunglah nilai dari</p> <p>a. $\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ$</p> <p>b. $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$</p> <p>Jawab :</p> |

| | |
|--|---|
| <p>7. Diketahui $\tan x = 2$, $\pi < x < 2\pi$, dan $\tan \frac{1}{2}y = 3$, $0 < y < \pi$. Tentukan Nilai dari</p> <p>a. $\tan y$ b. $\tan(2x + y)$ Jawab :</p> | <p>8. Tanpa menggunakan kalkulator, Hitunglah Nilai dari $\sin \frac{\pi}{14} \cdot \sin \frac{3\pi}{14} \cdot \sin \frac{5\pi}{14}$ Jawab :</p> |
| <p>9. Diketahui segitiga ABC siku-siku di B. Titik D dan E terletak pada sisi BC sehingga $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC$. Jika panjang AB = 1 cm dan BD = 2 cm. Tentukan panjang DE dan EC Jawab :</p> | <p>10. Diketahui $\cos A = \frac{3}{4}$, A sudut lancip. Tentukan nilai dari a. $\sin 6A$ b. $\cos 9A$ Jawab :</p> |
| <p>11. Diketahui $\sin x - \cos x = \frac{1}{4}$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Tentukan nilai a. $\cos 2x$ b. $\cos 6x$ Jawab :</p> | <p>12. Hitung nilai dari $\sin^3 15^\circ - \cos^3 75^\circ$ Jawab :</p> |
| <p>13. Buktikan bahwa : $\cos 3a \cdot \sin^3 a + \cos^3 a \cdot \sin 3a = \frac{3}{4} \sin 4a$ Jawab :</p> | <p>14. Buktikan bahwa : $\frac{\sin 2t + \sin t}{\cos 2t + \cos t + 1} = \tan t$ Jawab :</p> |
| <p>15. Buktikan bahwa : a. $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ b. $8\sin^4 x = 3 - 4\cos 2x + \cos 4x$ Jawab :</p> | <p>16. Buktikan bahwa: $2 - \frac{2\sin^2 x}{1 + \cot x} - \frac{2\cos^2 x}{1 + \tan x} = \sin 2x$ Jawab :</p> |

Kesimpulan Rumus sudut Pertengahan

$$* \sin\left(\frac{1}{2}A\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \text{ pilih + jika } \left(\frac{1}{2}A\right) \text{ terletak di kuadran I dan II}$$

$$* \cos\left(\frac{1}{2}A\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}, \text{ pilih + jika } \left(\frac{1}{2}A\right) \text{ terletak di kuadran I dan IV}$$

$$* \tan\left(\frac{1}{2}A\right) = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}, \text{ pilih + jika } \left(\frac{1}{2}A\right) \text{ terletak di kuadran I dan III}$$

Latihan 3

| | |
|---|--|
| <p>1. Diketahui $\sin 3a = \frac{1}{8}$, $0 < a < 45^\circ$, tentukan nilai dari $\sin \frac{3}{2}a$ Jawab :</p> | <p>2. Diketahui $\tan A = \frac{3}{4}$ dan $270^\circ < A < 360^\circ$ Tentukan nilai dari $\cos \frac{1}{2}A$ dan $\cot \frac{1}{2}A$ Jawab :</p> |
| <p>3. Diketahui $\cos x + \sin x = \frac{4\sqrt{2}}{5}$, x sudut lancip. Tentukan nilai dari $\sin x$ dan $\cos x$! Jawab :</p> | <p>4. Diketahui $\cos 10^\circ = a$. Tentukan nilai dari (Nyatakan jawabannya dalam a) a. $\sin 85^\circ$ b. $\cos 40^\circ$ Jawab :</p> |
| <p>5. Hitunglah nilai dari a. $\tan 15^\circ$ b. $\sin 22,5^\circ$ c. $\cos 67 \frac{1}{2}^\circ$ Jawab :</p> | <p>6. Hitunglah Nilai dari a. $\sec 112 \frac{1}{2}^\circ$ b. $\cot 157,5^\circ$ c. $\sin 7 \frac{1}{2}^\circ$ Jawab :</p> |
| <p>7. Segitiga ABC diketahui $\cos A = \frac{3}{5}$. Dan $\cos B = \frac{5}{13}$. Tentukan nilai dari $\cos \frac{1}{2}C$ Jawab :</p> | <p>8. Diketahui $\cos x = -\frac{7}{8}$. Tentukan nilai dari $\sin \frac{3}{2}x$ Jawab :</p> |
| <p>9. Diketahui segitiga ABC dan $\cos C = \frac{7}{32}$. Hitunglah nilai dari $\sin \frac{1}{2}(A + B)$ Jawab :</p> | <p>10. Hitung Nilai dari $\sin 11,25^\circ$ Jawab :</p> |

