

LINGKARAN

Standar Kompetensi (Aljabar) : Menyusun persamaan lingkaran dan garis singgungnya

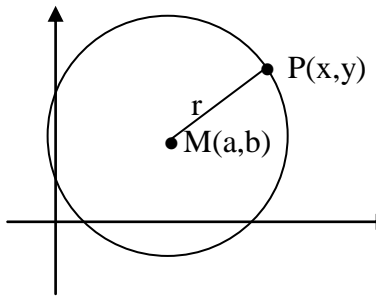
- Kompetensi Dasar :**
1. Menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan
 2. Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi

A. Persamaan Lingkaran

Definisi Lingkaran.

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama (disebut jari-jari lingkaran) terhadap titik tertentu (disebut pusat lingkaran) dan terletak pada bidang datar.

Perhatikan gambar dibawah ini. Dari definisi lingkaran dapat ditentukan persamaan lingkaran.



Lingkaran dengan pusat $M(a,b)$ dan jari-jari r

Jarak $PM = r$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 : \text{persamaan lingkaran}$$

Dengan pusat (a,b) dan jari-jari r

Atau:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Jika $-2a = A$, $-2b = B$ dan $a^2 + b^2 - r^2 = C$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 : \text{persamaan lingkaran}$$

dengan pusat $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ dan

$$\text{jari-jari } r = \sqrt{-C + (\frac{A}{2})^2 + (\frac{B}{2})^2}$$

Kesimpulan :

Bentuk Umum Persamaan Lingkaran

1. Persamaan Lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan berjari-jari r : $x^2 + y^2 = r^2$
2. Persamaan Lingkaran dengan pusat $M(a,b)$ dan berjari-jari r : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
3. Persamaan Lingkaran bentuk : $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, yaitu lingkaran dengan pusat $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ dan jari-jari $r = \sqrt{-C + (\frac{A}{2})^2 + (\frac{B}{2})^2}$

Catatan :

- Pusat lingkaran adalah sebuah titik yang dapat berhubungan dengan hasil perpotongan dua garis, atau titik tengah ruas garis.
- Jari-jari lingkaran adalah panjang ruas garis yang dapat berhubungan dengan :
 - a. Rumus jarak antara dua titik : $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
 - b. Rumus jarak antara titik (x_1, y_1) dan garis $ax+by+c=0$: $\left| \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$

Contoh :

1. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $4x^2 + 4y^2 + 8x - 12y - 9 = 0$
2. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat $(2,-1)$ dan melalui titik $(5,3)$

Latihan 1

1. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran berikut :

- a. $x^2 + y^2 = 2$
- b. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$
- c. $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$
- d. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$
- e. $x^2 + y^2 + 4x - 14 = 0$
- f. $(2x - 3)^2 + (2y - 5)^2 = 64$

2. Tentukan persamaan lingkaran jika diketahui

- a. Pusat (0,0) dan jari-jari 2
- b. Pusat (0,-1) dan jari-jari 4
- c. Pusat (2,0) dan jari-jari $2\sqrt{3}$
- d. Pusat (-2,3) dan jari-jari 5
- e. Pusat (-4, 5) dan menyinggung sumbu X
- f. Pusat (3,-2) dan menyinggung sumbu Y

3. Diketahui A(2,-5) dan B(-6,7). Tentukan persamaan lingkaran dengan garis tengah AB.

4. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat (3,1) dan menyinggung garis $12x + 5y = 3$

5. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat pada perpotongan antara garis $x+y=1$ dan $2x-y=5$, serta menyinggung garis $3x-4y+10=0$

6. Tentukan persamaan lingkaran yang memotong sumbu X menurut tali busur yang panjangnya 14 dan memotong sumbu Y menurut tali busur yang panjangnya 10 serta berjari-jari $5\sqrt{2}$

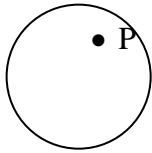
7. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat pada garis $2x-y=0$ dan menyinggung sumbu X positif dan sumbu Y positif

8. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di garis $x-2y+6=0$, melalui $O(0,0)$ dan menyinggung garis $4x-3y-6=0$

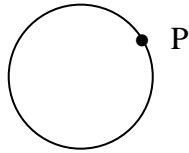
9. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $A(-4,4)$, $B(-5,-3)$ dan $C(2,4)$

10. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung garis $7x-y-5=0$ di titik $A(1,2)$ serta menyinggung garis $x+y+13=0$

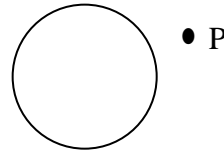
B. Kedudukan titik $P(x_1, y_1)$ terhadap Lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$



Titik P di dalam lingkaran



Titik P terletak pada lingkaran



Titik P di luar lingkaran

1. Substitusikan titik $P(x_1, y_1)$ ke persamaan lingkaran jika titik di dalam lingkaran : Ruas kiri < ruas kanan, titik terletak pada lingkaran Ruas kiri = ruas kanan , titik di luar lingkaran Ruas kiri > ruas kanan
2. Panjang garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ yang ditarik dari titik $P(x_1, y_1)$ diluar lingkaran adalah : $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C}$

Latihan 2

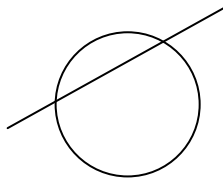
1. Tentukan kedudukan titik-titik dibawah ini terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$

- a. A (2,1)
- b. B(-2,3)
- c. C(0,-4)

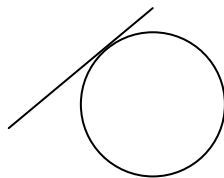
2. Tentukan panjang garis singgung lingkaran

- a. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$ yang ditarik dari titik (-3,3)
- b. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ yang ditarik dari titik (1,-2)

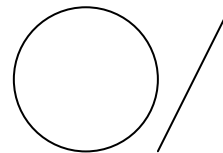
C. Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran



Garis memotong lingkaran



Garis menyinggung lingkaran



Garis tidak memotong lingkaran

Cara menentukan kedudukan garis $ax+by+c = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ antara lain:

Substitusikan x atau y dari persamaan garis ke persamaan lingkaran, hasilnya adalah persamaan kuadrat

- Jika $b^2 - 4ac > 0$, garis memotong lingkaran (didapatkan duapasang nilai x dan y / dua titik)
- Jika $b^2 - 4ac = 0$, garis menyinggung lingkaran (didapatkan sepasang nilai x dan y / satu titik)
- Jika $b^2 - 4ac < 0$, garis tidak memotong lingkaran (tidak ada nilai x atau y dari persamaan kuadrat tsb)

Latihan 3

1. Tentukan kedudukan garis dan lingkaran di bawah ini, jika memotong atau menyinggung tentukan pula titik potong atau titik singgungnya!

a. $x^2 + y^2 = 5$ dan garis $x + y = 3$

b. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$ dan garis $x-2y=0$

c. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ dan garis $x-y-1=0$

2. Diketahui garis $2x + y = k$ dan lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + y - 10 = 0$. Tentukan batas-batas nilai m agar

a. garis memotong lingkaran

b. garis menyinggung lingkaran

c. garis tidak memotong lingkaran.

PERSAMAAN GARIS SINGGUNG LINGKARAN

1. Persamaan garis singgung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ yang bergradien m adalah :

$$(y-b) = m(x-a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

2. Persamaan garis singgung lingkaran : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ di titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran adalah :

$$(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2$$

3. Persamaan garis singgung lingkaran : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ yang ditarik dari titik $P(x_1, y_1)$ di luar lingkaran :

Susbtitusikan $P(x_1, y_1)$ ke rumus garis singgung $(y-b) = m(x-a) \pm r\sqrt{1+m^2}$ kemudian carilah nilai

m . Persamaan garis singgungnya adalah $(y-y_1) = m(x-x_1)$

Contoh:

1. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 4x = 25$ yang tegaklurus dengan garis $3x + 4y = 7$

2. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ di titik $(1, -1)$

3. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 5$ yang ditarik dari titik $(3, 1)$

Latihan 4

1. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran

a. $x^2 + y^2 = 25$ yang bergradien $-3/4$

b. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ yang membentuk sudut 60° terhadap sumbu X positif

c. $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$ yang sejajar garis $2x + y - 3 = 0$

d. $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 31 = 0$ yang tegak lurus garis $x + 3y - 2 = 0$

2. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran

a. $x^2 + y^2 = 10$ di titik (1,3)

b. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$ dititik (-6,4)

c. $x^2 + y^2 + 4y - 9 = 0$ di titik (-2,1)

d. $2x^2 + 2y^2 + 7x - 15y + 4 = 0$ dititik yang absis dan ordinatnya sama

3. Garis singgung lingkaran $(x-5)^2 + (y+12)^2 = 169$ juga menyinggung lingkaran $(x-5)^2 + (y-12)^2 = p$.
Tentukan Nilai p!

4. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 5$ yang ditarik dari titik (3,2)!

5. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ yang ditarik dari titik (1,6)

6. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 8$ yang ditarik dari titik (0,0) !

7. Lingkaran $x^2 + y^2 + 10x + ay + 9 = 0$ menyinggung sumbu Y. Tentukan nilai a !
8. Garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ di titik (4,3) memotong lingkaran $x^2 + y^2 = 50$ di titik P dan Q. Buktikan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 50$ di titik P dan Q saling tegak lurus
9. Titik P (-1,k) terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 2$. Tentukan k agar garis singgung yang ditarik dari titik P terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 2$ saling tegak lurus !
10. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ dan lingkaran $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$!

Latihan Ulangan

<p>1. Lingkaran $2x^2 + 2y^2 + ax + 4y + 1 = 0$ menyinggung sumbu X. Pusat lingkaran tersebut adalah</p> <p>a. (2,1) b. (2,2) c. (2,-1) d. (2,-2) e. $(2\sqrt{2}, -1)$</p>	<p>2. Jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + ay - 60 = 0$ yang melalui titik (-4,-2) adalah</p> <p>a. $8\sqrt{10}$ b. $6\sqrt{10}$ c. $5\sqrt{2}$ d. $4\sqrt{5}$ e. 5</p>
<p>3. Salah satu persamaan garis singgung yang ditarik dari titik (2,4) pada lingkaran $x^2 + y^2 + 8x - 12y + 32 = 0$ adalah</p> <p>a. $3x + 4y + 22 = 0$ b. $4x + 3y - 22 = 0$ c. $2x - y + 8 = 0$ d. $2x + y - 8 = 0$ e. $x - 2y - 6 = 0$</p>	<p>4. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik (3,2) dan menyinggung sumbu Y adalah</p> <p>a. $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 16 = 0$ b. $x^2 + y^2 + 8x - 14y - 49 = 0$ c. $x^2 + y^2 + 8x - 14y - 16 = 0$ d. $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 49 = 0$ e. $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 19 = 0$</p>

<p>5. Garis $4y = 3x + 20$ menyinggung lingkaran yang berpusat di titik $(m, 2)$ dengan jari-jari 3. Absis titik pusat lingkaran adalah</p> <p>a. 1 b. 2 c. 3 d. 4 e. 5</p>	<p>6. Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y + 8 = 0$ yang tegak lurus garis $3x - 4y + 4 = 0$ adalah ...</p> <p>a. $4x + 3y - 16 = 0$ b. $4x + 3y + 16 = 0$ c. $4x + 3y - 27 = 0$ d. $4x + 3y - 12 = 0$ e. $4x + 3y + 12 = 0$</p>
<p>7. Diketahui titik $A(2, 4)$ dan titik $B(6, 6)$. Persamaan lingkaran yang berdiameter AB adalah</p> <p>a. $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 36 = 0$ b. $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 36 = 0$ c. $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 36 = 0$ d. $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 36 = 0$ e. $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 46 = 0$</p>	<p>8. Pusat dan jari-jari lingkaran $2x^2 + 2y^2 + 12x - 16y - 48 = 0$ adalah</p> <p>a. $(6, -8)$ dan 5 b. $(-3, 4)$ dan 6 c. $(3, 4)$ dan 7 d. $(-3, 4)$ dan 7 e. $(-6, 8)$ dan 5</p>
<p>9. Persamaan lingkaran yang berpusat di $(-6, 5)$ dan menyinggung garis $2x - 3y + 1 = 0$ adalah</p> <p>a. $(x + 6)^2 + (y - 5)^2 = 2$ b. $(x + 6)^2 + (y - 5)^2 = 26$ c. $(x + 6)^2 + (y - 5)^2 = 52$ d. $(x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 26$ e. $(x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 52$</p>	<p>10. Lingkaran melalui titik $(-1, 0)$, $(5, 0)$ dan $(0, 2)$. Jari-jari lingkaran tersebut adalah</p> <p>a. $\frac{1}{2}\sqrt{45}$ b. $\frac{1}{2}\sqrt{37}$ c. $\frac{1}{2}\sqrt{38}$ d. $\frac{1}{4}\sqrt{17}$ e. $\frac{1}{4}\sqrt{145}$</p>
<p>11. Sebuah lingkaran berpusat di garis $2x + y = 0$ dan menyinggung dua garis $4x - 3y + 10 = 0$ dan $4x - 3y - 30 = 0$. koordinat pusat lingkaran tersebut adalah</p> <p>a. $(-1, 2)$ b. $(2, -4)$ c. $(1, -2)$ d. $(-2, 4)$ e. $(3, -6)$</p>	<p>12. Panjang garis singgung lingkaran yang ditarik dari titik $(2, -1)$ terhadap lingkaran $4x^2 + 4y^2 + x - 3y - 1 = 0$ adalah</p> <p>a. $\sqrt{6}$ b. $2\sqrt{6}$ c. $2\sqrt{3}$ d. $3\sqrt{2}$ e. $\sqrt{15}$</p>
<p>13. Sebuah lingkaran menyinggung sumbu Y dan memotong sumbu X menurut tali busur yang panjangnya 6 satuan dan pusatnya pada garis $2x - y = 0$. Jari-jari lingkaran tersebut adalah</p> <p>a. $\sqrt{6}$ b. $\sqrt{5}$ c. 2 d. $\sqrt{3}$ e. $\sqrt{2}$</p>	<p>14. Titik P terletak pada garis $x - 2y = 2$. Tentukan koordinat titik P sehingga garis singgung yang di tarik dari titik P terhadap lingkaran $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ saling tegak lurus</p>
<p>15. Garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$ di titik $(-2, 4)$ juga menyinggung lingkaran $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = p$. Tentukan nilai p</p>	<p>16. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya pada garis $x + 3y = 11$ dan menyinggung garis $x + 2y = 3$ di titik $(1, 1)$</p>