

BAB VII TRANSFORMASI GEOMETRI

A. Jenis-jenis transformasi :

No	Nama transformasi	Perhitungan menentukan bayangan titik A(x,y) oleh suatu transformasi	Hasil bayangan dari titik A adalah A' (x',y')	Matriks transformasi yang bersesuaian
1	Translasi searah sumbu X sejauh a dan searah sumbu Y sejauh b	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x' &= a + x \\ y' &= b + x \end{aligned}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
2	Transformasi yang bersesuaian dengan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
3	a. Refleksi terhadap Sumbu X (garis y = 0)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
	b. Garis y = b	$\begin{pmatrix} x' \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-b \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= 2b - y \end{aligned}$	
	c. Sumbu Y (garis x = 0)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y \end{aligned}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	d. Garis x = a	$\begin{pmatrix} x'-a \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x' &= 2a - x \\ y' &= y \end{aligned}$	
	e. Garis y = x	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x \end{aligned}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
	f. Garis y = -x	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x' &= -y \\ y' &= -x \end{aligned}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
	g. Titik O(0,0)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \end{aligned}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
	h. Titik P(a,b)	$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x' &= 2a - x \\ y' &= 2b - y \end{aligned}$	
	i. Garis y = mx	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x' &= \dots\dots\dots \\ y' &= \dots\dots\dots \end{aligned}$	$\begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix}$
	j. Garis y = mx + n	$\begin{pmatrix} x' \\ y'-n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-n \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} x' &= \dots\dots\dots \\ y' &= \dots\dots\dots \end{aligned}$	

LKS Matematika Lanjutan

4	a. Rotasi dengan pusat O(0,0) sejauh α	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$x' = \dots$ $y' = \dots$	$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$
	b. Rotasi dengan pusat P(a,b) sejauh α	$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$	$x' = \dots$ $y' = \dots$	
5	a. Dilatasi (perkalian) pusat O(0,0) dan factor skala k	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$x' = kx$ $y' = ky$	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
	b. Dilatasi pusat P(a,b) dan factor skala k	$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$	$x'-a = k(x-a)$ $y'-b = k(y-b)$	

Latihan 1

<p>1. Translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memetakan A(4,-2) ke titik A'(2,3). Tentukan a dan b? Jawab :</p>	<p>2. Tentukan bayangan titik A(2,-1) oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$? Jawab :</p>
<p>3. Tentukan bayangan dari titik P(5,-3) oleh refleksi terhadap</p> <ol style="list-style-type: none"> sumbu X garis $x + y = 0$ titik O garis $y - 2 = 0$ garis $x + 2y = 0$ <p>Jawab</p>	<p>4. Titik A'(5,7) adalah bayangan dari A oleh refleksi terhadap</p> <ol style="list-style-type: none"> sumbu Y garis $y = x$ garis $x = -3$ titik (4,-1) garis $2x - y - 3 = 0$ <p>tentukan koordinat A pada tiap-tiap refleksi diatas ? Jawab :</p>

LKS Matematika Lanjutan

<p>5. Tentukan bayangan titik B(4,-2) oleh rotasi sejauh 135° searah jarum jam dengan pusat</p> <p>a. O(0,0) b. P(-2, 6) Jawab :</p>	<p>6. P'(3,-2) adalah bayangan dari P</p> <p>a. Karena dilatasi pusat O dan factor skala 2, tentukan koordinat P ? b. Karena dilatasi pusat R(-1, 2) dan factor skala -2, tentukan koordinat P ? Jawab :</p>
<p>7. Suatu rotasi dengan pusat O memetakan titik A(-3,4) menjadi A' yang terletak tepat pada sumbu Y negative. Tentukan koordinat bayangan titik P(5,10) oleh rotasi tersebut ?</p>	<p>8. Suatu dilatasi memetakan A(2,1) dan B(4,1) menjadi A'(4,7) dan B'(10,7).</p> <p>a. tentukan Pusat dilatasi dan factor skalanya? b. Tentukan bayangan titik (3,2) oleh dilatasi tersebut ? Jawab :</p>

LKS Matematika Lanjutan

B. Menentukan bayangan kurva $y = f(x)$.

Langkah-langkahnya :

1. Dari rumus bayangan titik nyatakanlah x dan y dalam x' atau y'

$$\text{Bila } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ maka } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ maka } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

2. Substitusikan x dan y ke $y = f(x)$ kemudian hilangkan tanda aksen.

Latihan 2

<p>1. Tentukan bayangan garis $2x - 3y + 1 = 0$ oleh transformasi yang bersesuaian dengan $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$?</p> <p>Jawab :</p>	<p>2. Tentukan translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ yang memetakan parabola $y = 2x^2 - 6x + 1$ menjadi $y = 2x^2 + 10x + 17$?</p> <p>Jawab :</p>
<p>3. Tentukan persamaan garis yang memetakan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ menjadi lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 20 = 0$?</p> <p>Jawab :</p>	<p>4. Tentukan Pusat relasi dan besar sudut putarnya sehingga memetakan garis $2x+y=3$ menjadi garis $3x-y=2$?</p> <p>Jawab :</p>

C. Komposisi transformasi

1. Translasi $T_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dilanjutkan $T_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ditulis $T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$

2. Transformasi yang bersesuaian dengan $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dilanjutkan transformasi

yang bersesuaian dengan $M_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ ditulis $M_2 \circ M_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

3. Rotasi dengan Pusat P sejauh α dilanjutkan rotasi dengan pusat P sejauh $\beta =$
Rotasi dengan pusat P sejauh $(\alpha + \beta)$

4. Refleksi terhadap garis $y = \tan \alpha \cdot x + n$ (gradiennya $\tan \alpha$) dilajutkan refleksi terhadap garis $y = \tan \beta \cdot x + k$ (gradiennya $\tan \beta$) = Rotasi dengan pusat perpotongan antara dua garis tersebut dan sejauh $2(\beta - \alpha)$

5. Bangun datar dengan luas L ditransformasikan oleh matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka luas bayangannya adalah $L' = (ad - bc) \cdot L$

Latihan 1

<p>1. Tentukan bayangan dari A(2,5) oleh refleksi garis $x = 3$ dilanjutkan rotasi pusat O sejauh 270° dilanjutkan dilatasi dengan pusat P(-1,-2) dan factor skala -3? Jawab :</p>	<p>2. Suatu transformasi dirumuskan $x' = 3x - 2y$ dan $y' = 5y - 4x$. Tentukan Luas bayangan lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$ oleh transformasi tersebut</p>
--	--

LKS Matematika Lanjutan

<p>3. Tentukan bayangan parabola $y = x^2$ oleh refleksi terhadap garis $x - y - 2 = 0$ dilanjutkan rotasi pusat O sejauh 180° ? Jawab :</p>	<p>4. Tentukan transformasi tunggal yang dapat menggantikan refleksi terhadap garis $x = a$ dilanjutkan garis $x = b$ dilanjutkan garis $x = c$? Jawab :</p>
<p>5. $2x + y - 4 = 0$ adalah bayangan garis l oleh refleksi terhadap garis $x + y - 2 = 0$, dilanjutkan dilatasi dengan pusat $(-2, 0)$ dan factor skala 3. Tentukan persamaan garis l ? Jawab :</p>	<p>6. Tentukan transformasi yang memetakan parabola $y = x^2 + 4x + 1$ menjadi parabola $x = y^2 - 4y + 1$? Jawab :</p>
<p>7. T = refleksi terhadap garis $y = \tan 50^\circ x$ M = refleksi terhadap garis $y = \tan 20^\circ x$, dan, N = refleksi terhadap garis 30° Jika bayangan titik $(4, x)$ oleh transformasi $(N \circ M \circ T)$ adalah titik $(-2, y)$ tentukan $x - y$? Jawab :</p>	<p>8. Suatu transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ memetakan P(-1, 2) dan Q(1, -1) menjadi P'(-4, 5) dan Q'(3, -2). Tentukan koordinat R jika bayangannya R'(4, 9) ? Jawab :</p>

LKS Matematika Lanjutan

9. Tentukan bayangan dari garis $2x-y = 0$ oleh rotasi dengan pusat O sejauh 15° searah jarum jam dilanjutkan 240° berlawanan arah jarum jam ?

Jawab :

10. Transformasi $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ memetakan A menjadi B. Jika A dan B terletak pada garis $y = mx$. Tentukan nilai m?

Jawab :

11. Segitiga ABC, diketahui A(-1,4), B(3,-5) dan C(4,-2). Dicerminkan terhadap garis $x+y = 0$ dilanjutkan translasi $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dilanjutkan dilatasi pusat (-1,1) dan factor skala -2. Tentukan koordinat titik berat dari bayangan segitiga ABC ?

Jawab :

12. Tentukan bayangan garis $x + 3y + 2 = 0$ oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dilanjutkan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}?$$

Jawab :

Latihan ulangan

<p>1. Koordinat bayangan titik (2,1) oleh refleksi berurutan terhadap garis $y = x$ dan sumbu Y adalah.....</p> <p>a. (-2,1) b. (-1,2) c. (-1,-2) d. (1,-2) e. (-2,-1)</p>	
<p>2. Oleh suatu transformasi bayangan titik (3,2) dan titik (-4,1) adalah (0,3) dan (-11,-4). Koordinat bayangan titik (5,-3) oleh transformasi itu adalah</p> <p>a. (19,5) b. (-19,5) c. (-16,5) d. (16,5) e. (-19,-5)</p>	
<p>3. Persamaan bayangan kurva $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$ oleh pencerminan terhadap garis $y = -x$ adalah ..</p> <p>a. $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 6 = 0$ b. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ c. $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0$ d. $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ e. $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$</p>	
<p>4. Koordinat bayangan titik(-2,3) pada perputaran pusat (2,1) sejauh 150° dilanjutkan dengan 120° adalah</p> <p>a. (5,4) b. (6,-1) c. (6,1) d. (4,5) e. (-1,6)</p>	
<p>5. Diketahui T adalah refleksi terhadap sumbu X dan K adalah rotasi pusat O sejauh -90° Matrik yang bersesuaian dengan ToK adalah</p> <p>a. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$</p>	

LKS Matematika Lanjutan

<p>6. Segitiga ABC, diketahui A(2,0), b(0,2), dan C(4,4). Luas bangun bayangan segitiga ABC oleh transformasi $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ adalah</p> <p>a. 4 b. 6 c. 12 d. 24 e. 36</p>	
<p>7. Bayangan dari garis $3x - 2y + 5 = 0$ oleh rotasi dengan pusat O sejauh $\frac{\pi}{4}$ adalah</p> <p>a. $5x+y+5=0$ b. $5x-y+5\sqrt{2}=0$ c. $5x+y+5\sqrt{2}=0$ d. $x+y+5=0$ e. $x+y+5\sqrt{2}=0$</p>	
<p>8. Bayangan titik (-12,1) oleh refleksi garis $x = -2$ dilanjutkan refleksi garis $y = 3$ dan kemudian dirotasi pusat O sejauh 90° adalah</p> <p>a. (-5,5) b. (-5,10) c. (-5,8) d. (5,-8) e. (8,-5)</p>	
<p>9. Dilatasi memetakan titik (1,-2) dan (2,1) ke titik (10,-17) dan (14,-5). Bayangan titik (-2,-1) oleh dilatasi itu adalah</p> <p>a. (-14,5) b. (-2,-13) c. (-2,13) d. (13,-2) e. (14,-7)</p>	
<p>10. Pada dilatasi dengan pusat A(-1,3) dan factor skala 2, bayangan dari garis $x + 2y - 4 = 0$ adalah.....</p> <p>a. $x + 2y - 1 = 0$ b. $x + 2y - 3 = 0$ c. $x + 2y - 6 = 0$ d. $x - 2y - 13 = 0$ e. $x - 2y - 15 = 0$</p>	

LKS Matematika Lanjutan

<p>11. Garis l merefleksikan garis $12x + 5y = 2$ menjadi garis $4x + 3y = -2$. Persamaan garis l adalah</p> <p>a. $4x + 7y = 18$ b. $4x - 7y = 18$ c. $7x + 4y = 18$ d. $7x - 4y = 18$ e. $2x + y = 0$</p>	
<p>12. Pada suatu transformasi bayangan A(2,-1) dan B(-1,3) berturut-turut adalah A'(-5,-1) dan B'(10,13). Jika C'(-10,-2) bayangan dari C, maka koordinat C adalah</p> <p>a. (4,-2) b. (-4,-2) c. (4,2) d. (4,-6) e. (6,-4)</p>	
<p>13. Transformasi tunggal yang mewakili refleksi terhadap garis $y = x$ dilanjutkan rotasi 90° dengan pusat O adalah</p> <p>a. refleksi terhadap garis $y = -x$ b. Refleksi terhadap sumbu X c. Refleksi terhadap sumbu Y d. transformasi Identitas e. refleksi terhadap titik O</p>	
<p>14. Transformasi T memetakan (2,3) dan (-1,1) berturut-turut ke (1,-3) dan (-3,-1) dan transformasi P adalah rotasi sebesar $\frac{\pi}{2}$ dengan pusat O searah dengan putaran jarum jam Matriks yang bersesuaian dengan T dilanjutkan P adalah</p> <p>a. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$</p>	
<p>15. Rotasi dengan pusat O sejauh α memetakan titik A(6,8) menjadi A' yang terletak pada sumbu X positif. Bayangan (-10,10) oleh rotasi tersebut adalah ...</p> <p>a. (2,14) d. (8,-2) b. (-2, 8) e. (4,12) c. (2, 8)</p>	

LKS Matematika Lanjutan

<p>16. Translasi yang memetakan parabola $y = x^2$ menjadi $y = x^2 + 4x + 5$ adalah $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Nilai $a+b = \dots\dots$</p> <p>a. -3 b. -2 c. -1 d. 1 e. 2</p>	
<p>17. Bayangan garis $3x - 2y + 1 = 0$ oleh translasi $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dilanjutkan transformasi $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ adalah</p> <p>a. $11x + 7y + 6 = 0$ b. $11x + 7y - 6 = 0$ c. $11x - 7y + 6 = 0$ d. $7x + 11y + 6 = 0$ e. $7x - 11y - 6 = 0$</p>	
<p>18. Dilatasi dengan pusat P dan factor skala -3 memetakan A ke B. perbandingan $\overrightarrow{BA} : \overrightarrow{PB}$ adalah</p> <p>a. 2 : 3 b. 3 : 1 c. ! : 1 d. -1 : 3 e. 3 : -2</p>	
<p>19. Transformasi $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ memetakan garis $y = x$ menjadi $y = (2 + \sqrt{3})x$. Nilai a adalah</p> <p>a. $2 + \sqrt{3}$ b. $2 - \sqrt{3}$ c. $\sqrt{3}$ d. $-\sqrt{3}$ e. 2</p>	
<p>20. Transformasi $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ memetakan garis $y = mx$ menjadi $y = mx$ sendiri. Nilai m adalah</p> <p>a. $2 + \sqrt{5}$ b. $2 - \sqrt{5}$ c. $\sqrt{5}$ d. $-2 + \sqrt{5}$ e. $\frac{\sqrt{5}}{2}$</p>	