

BAB I
INTEGRAL TAK TENTU (ANTIDIFFERENSIAL) : ∫

Kompetensi Dasar	
3.10	Mendeskripsikan integral tak tentu (anti turunan) fungsi aljabar dan menganalisis sifat-sifatnya berdasarkan sifat-sifat turunan fungsi
4.10	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu (anti turunan) dari fungsi aljabar)
IPK :	
3.10.1	Merumuskan integral fungsi aljabar dari turunan fungsi aljabar
3.10.2	Menganalisis sifat-sifat integral fungsi aljabar dari turunan fungsi aljabar berdasarkan sifat-sifat turunan fungsi
3.10.3	Menggunakan sifat-sifat integral fungsi aljabar dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral
4.10.1	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu (anti turunan) dari fungsi aljabar)
4.10.2	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu (anti turunan) dari fungsi aljabar) dengan menggunakan substitusi fungsi aljabar

Pegertian Integral

Integral juga disebut anti diferensial (anti turunan). Suatu fungsi F dikatakan sebagai anti turunan (integral) dari fungsi f apabila $F'(x) = f(x)$, untuk setiap x dalam domain dari F. Integral dari f(x) dapat dirumuskan sebagai berikut. $\int f(x)dx = F(x) + C$; (C=konstanta)

Perhatikan hasil deferensial fungsi berikut :

$F(x) = x^2 + 1$	Turunan dari F(x) adalah $F'(x) = 2x$	Kebalikan dari turunannya adalah : $\int 2x \, dx = x^2 + 1$
$F(x) = x^2 - 10$	Turunan dari F(x) adalah $F'(x) = 2x$	Kebalikan dari turunannya adalah : $\int 2x \, dx = x^2 - 10$
$F(x) = x^2 + 15$	Turunan dari F(x) adalah $F'(x) = 2x$	Kebalikan dari turunannya adalah : $\int 2x \, dx = x^2 - 15$
Sehingga dirumuskan $\int 2x \, dx = x^2 + C$ dinamakan integral tak tentu (karena C nilainya tidak tentu)		

A. Rumus-rumus dasar integral tak tentu Fungsi Aljabar:

1. $\int k \, dx = kx + C$ (k : bilangan real/konstanta)
2. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ atau $\int kx^n \, dx = k \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

konsep rumus integral tak tentu adalah :

- a. variable (ditentukan oleh huruf yang berada di belakang d) yang dipangkatkan n

harus sama dengan variable setelah d , misal : $\int U^n \, dU = \frac{U^{n+1}}{n+1} + C,$

- b. tidak ada perkalian dan pembagian antara variable di dalam integral
- c. Cara menyelesaikan soal integral tak tentu jika soal belum sesuai dengan konsep rumus maka diupayakan menjadi bentuk rumus dengan cara :

menjabarkan/menyederhanakan/ membuat pemisalan/atau mengganti $dx = \frac{df(x)}{f'(x)}$

/menggunakan pemisalan $u = f(x)$, sehingga menjadi bentuk rumus

Contoh :

Selesaikan $\int 12x^3(x^4 - 2)^2 dx$, soal tersebut belum merupakan konsep rumus, sehingga cara menyelesaikannya diupayakan menjadi konsep penerapan rumus, antara lain dengan cara :

a. Menjabarkan menjadi $\int 12x^3(x^8 - 4x^4 + 4)dx = \int 12x^{11} - 48x^7 + 48x^3 dx$ (rumus)

$$= \frac{12x^{12}}{12} - \frac{48x^8}{8} + \frac{48x^4}{4} + C = x^{12} - 6x^8 + 12x^4 + C$$

b. atau dengan mengganti $dx : \int 12x^3(x^4 - 2)^2 \frac{d(x^4 - 2)}{4x^3} = \int 3(x^4 - 2)^2 d(x^4 - 2)$ (rumus)

$$= \frac{3(x^4 - 2)^3}{3} + C = (x^4 - 2)^3 + C \text{ bila dijabarkan} = x^{12} - 6x^8 + 12x^4 - 8 + C = x^{12} - 6x^8 + 12x^4 + C$$

$$3. \int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$4. \int f'(x) dx = f(x) + C$$

$$5. \int f''(x) dx = f'(x) + C$$

$$6. \frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x)$$

Contoh :

$$1. \text{ Selesaikan : } \int (3x^2 - 10x\sqrt{x} + \frac{2}{x^3} - 4) dx$$

Jawab :

$$2. \text{ Selesaikan : } \int (2 - 3x)^8 dx$$

Jawab :

$$3. \text{ Selesaikan : } \int \frac{1-x}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} dx$$

Jawab :

$$4. \text{ Selesaikan : } \int x^5 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

Jawab :

Latihan 1

1. Selesaikan : $\int x(x-2)(x+4) dx$ Jawab :	6. Selesaikan : $\int \frac{(x-2)^3}{x^5} dx$ Jawab :
2. Selesaikan : $\int \frac{2}{3x^3\sqrt{x^2}} dx$ Jawab :	7. Selesaikan: $\int \sqrt{x-4 + \frac{2}{x}} dx$ Jawab :
3. Selesaikan : $\int (x^m + m^n) dx$ Jawab :	8. Selesaikan : $\int (6t^2 - \frac{1}{6t^2}) dt$ Jawab :
4. Selesaikan : $\int \left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^2 dx$ Jawab :	9. Selesaikan : $\int \frac{(2 + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$ Jawab :
5. Selesaikan : $\int x^2 \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ Jawab :	10. Selesaikan : $\int \left(\frac{x^2}{y^3} - \frac{y^3}{x^2}\right) dy$ Jawab :

<p>11. Jika $F'(x) = 9x^2 - 4x + 1$ dan untuk $x = 2$ nilai dari $f(x)$ adalah 5. Tentukan $F(x)$? Jawab :</p>	<p>16. Gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ disembarang titik (x,y) adalah $\frac{dy}{dx} = (3x - 2)^2$. Jika kurva tersebut melalui titik $(2,-3)$ dan $(-1,k)$. tentukan nilai k ? Jawab :</p>
<p>12. Diketahui $F''(x) = 12x^2 - 2$, $F(1) = -5$, dan $F(2) = 7$. Tentukan $F(x)$? Jawab :</p>	<p>17. Selesaikan : $\int \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt[3]{3x}} \right) dx$ Jawab :</p>
<p>13. Gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ disembarang titik (x,y) adalah $5x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Jika kurva tersebut melalui titik $(4,-1)$, tentukan persamaan kurva tersebut ? Jawab :</p>	<p>18. Diketahui $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x$ grafik melalui titik $A(-1,4)$ dan gradient garis singgung di titik A tegak lurus dengan garis $x - 2y + 3 = 0$. Tentukan persamaan kurva dari grafik tersebut ? Jawab :</p>
<p>14. Diketahui turunan kedua dari $y = f(x)$ adalah $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 8$, Jika garis singgung kurva tersebut di titik $(1,2)$ sejajar dengan garis $x - 4y + 3 = 0$. Tentukan persamaan kurva tersebut ? Jawab :</p>	<p>19. Suatu partikel bergerak pada saat t detik mempunyai percepatan 6 cm/s^2. Jika setelah 4 detik partikel tersebut mempunyai kecepatan 20 cm/s dan jarak yang ditempuh 40 cm. Tentukan jarak yang ditempuh partikel tersebut setelah 2 detik ? Jawab :</p>
<p>15. Diketahui $F'(x) = 3x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + 2$, Jika $F(4) = 47$, tentukan $F(x)$? Jawab :</p>	<p>20. Sebuah fungsi kuadrat diketahui $f'(x) = 2x + 3$ jika fungsi tersebut mempunyai nilai minimum $-0,25$. Tentukan koordinat titik potong fungsi kuadrat tersebut dengan sumbu Y ? Jawab :</p>

Latihan 2.

1. Selesaikan : $\int \frac{1}{\sqrt[3]{2-3x}} dx$ Jawab :	2. Selesaikan : $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x-4}} \right) dx$ Jawab :
3. Selesaikan : $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} dx$ Jawab :	4. Selesaikan : $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)^2 dx$ Jawab :
5. Selesaikan : $\int \frac{x^2 - 4x - 3}{(x-2)^2} dx$ Jawab :	6. Selesaikan : $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+2x}} dx$ Jawab :
7. Selesaikan : $\int \sqrt{x^4 + x^2} dx$ Jawab :	8. Selesaikan : $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^4 - 4x^2 + 3)^5} dx$ Jawab :
9. Selesaikan : $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2\sqrt{x}} dx$ Jawab :	10. Selesaikan : $\int \sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{x} - 1)^5 dx$ Jawab :