

PERKALIAN DUA VEKTOR & PROYEKSI VEKTOR

1. Identitas

a. Mata Pelajaran : Matematika X (Peminatan)

b. Semester : 2

c. Kompetensi Dasar :

Kompetensi Dasar 3.2	Kompetensi Dasar 4.2
Menjelaskan vektor, operasi vektor, panjang vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan vektor, operasi vektor, panjang vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga

d. Indikator Pencapaian Kompetensi:

IPK KD 3.2	IPK KD 4.2
3.2.1 Mengenali vektor dalam ruang berdimensi dua	4.2.1 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan vektor dalam ruang berdimensi dua
3.2.2 Mengidentifikasi operasi vektor dalam ruang berdimensi dua	4.2.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan operasi vektor dalam ruang berdimensi dua
3.2.3 Menyebutkan panjang vektor dalam ruang berdimensi dua	4.2.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan panjang vektor dalam ruang berdimensi dua
3.2.4 Mengidentifikasi sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua	
3.2.5 Menjelaskan konsep vektor dalam ruang berdimensi dua	
3.2.6 Menjelaskan operasi vektor dalam ruang berdimensi dua	
3.2.7 Menjelaskan panjang vektor dalam ruang berdimensi dua	
3.2.8 Menjelaskan sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua	

e. Materi Pokok : Perkalian Dua Vektor, Proyeksi Vektor

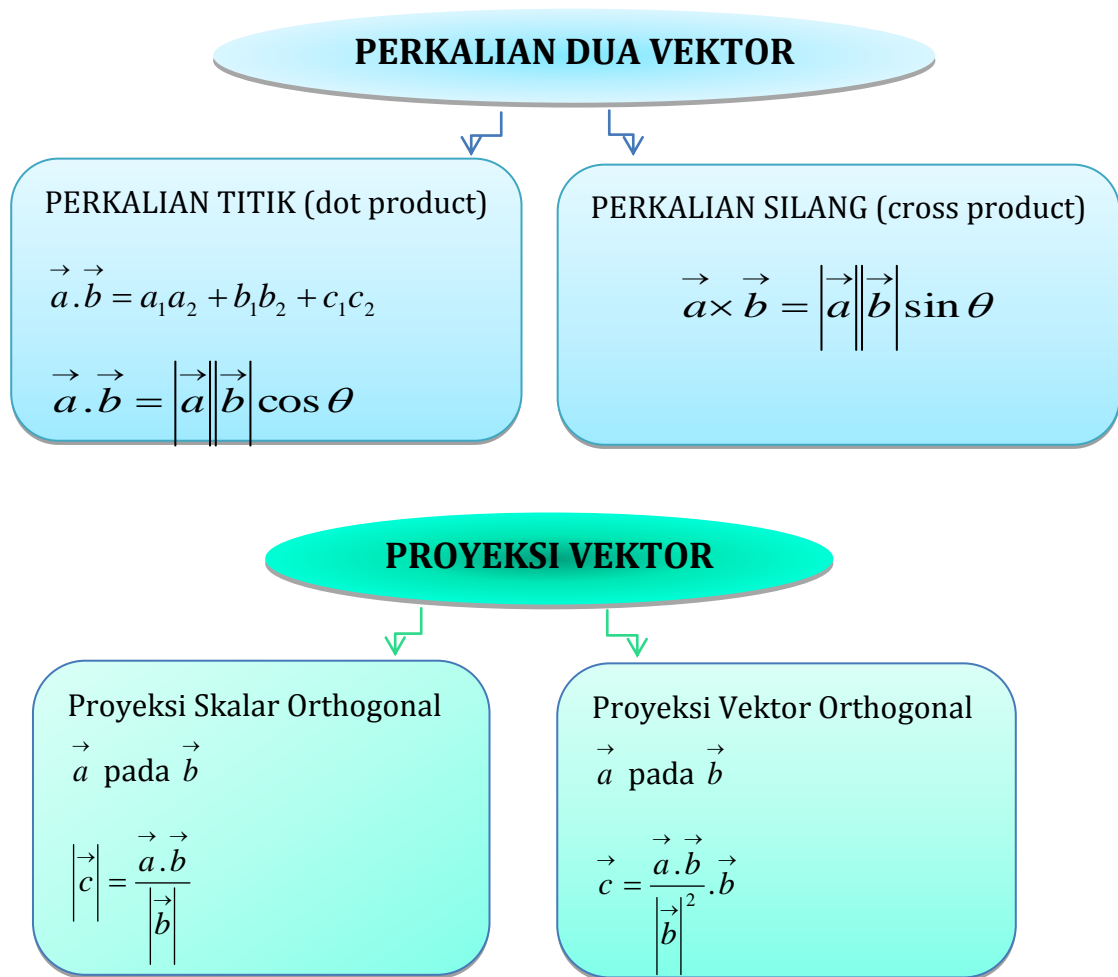
f. Alokasi Waktu : 4 kali pertemuan

g. Tujuan Pembelajaran :

Melalui pendekatan saintifik, peserta didik diharapkan dapat menjelaskan vektor, operasi vektor, panjang vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan vektor, operasi vektor, panjang vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga serta memiliki sikap responsif, kreatif, komunikatif serta kerjasama dengan baik.

h. Materi Pembelajaran: Perkalian Dua Vektor, Proyeksi Vektor

2. Peta Konsep



3. Kegiatan Pembelajaran

Perkalian Skalar (Dot Product)

Perkalian skalar vektor \vec{a} dan \vec{b} adalah : $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$; α : sudut antara \vec{a} dan \vec{b}

Bila $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ maka $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Sifat-sifat perkalian skalar antara dua vektor:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(m \cdot \vec{a}) \cdot (n \cdot \vec{b}) = (m \cdot n) (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

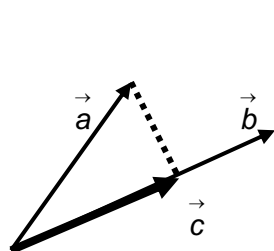
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Jika $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, maka \vec{a} tegak lurus \vec{b}

LATIHAN SOAL

<p>1. Jika $\vec{a} = 3$ dan $\vec{b} = 4$, sudut antara \vec{a} dan \vec{b} adalah 120°. Tentukan nilai dari $\vec{a} \cdot \vec{b}$</p>	<p>2. Diketahui $\vec{a} = 3i + j + k$ dan $\vec{b} = 2j - k$. Jika $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ dan $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$, tentukan $\vec{u} \cdot \vec{v}$</p>
<p>3. Diketahui $\vec{a} = xi + yj + 3k$, $\vec{b} = i + 2j + 3k$ dan $\vec{c} = 3i - j + 2k$. Jika \vec{a} tegak lurus \vec{b}, dan \vec{a} tegak lurus \vec{c}, tentukan nilai x dan y.</p>	<p>4. Sudut antara vektor $\vec{a} = 2i + j + k$, dan $\vec{b} = mi + k$ adalah $\frac{\pi}{6}$. Tentukan nilai m.</p>
<p>5. Jika $\vec{a} = 2$, $\vec{b} = 5$ dan $\vec{a} - \vec{b} = \sqrt{19}$. Tentukan nilai dari $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{a})$.</p>	<p>6. Diketahui $\vec{a} = 2i + j + k$, $\vec{b} = i - 3j + 2k$. Jika \vec{u} vektor satuan yang tegak lurus \vec{a} dan \vec{b}. Tentukan vektor \vec{u}.</p>
<p>7. Diketahui $\vec{a} = 2$, $\vec{b} = 3$, dan $\vec{c} = 4$.</p>	<p>8. ABCD adalah jajaran genjang, diketahui A(3,-3,2), B(5,-6,8) dan</p>

<p>Jika \vec{a}, \vec{b}, dan \vec{c} saling membentuk sudut 60° antara satu dengan yang lainnya, tentukan $\left \vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c} \right$.</p>	<p>$C(2,-1,0)$. Tentukan $\tan \angle ACD$.</p>
<p>9. ABCD adalah jajargenjang. Jika $AB = 4\text{cm}$, $AC=3\text{cm}$ dan $\angle BAD = 60^\circ$. Tentukan $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$.</p>	<p>10. $\vec{a} = 4$, $\vec{b} = 7$, dan $\vec{2a} + \vec{b} = \sqrt{145}$ Tentukan $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + \vec{b})$</p>



Proyeksi vektor orthogonal \vec{a} pada \vec{b} adalah \vec{c}

$$\vec{c} = \left[\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right] \vec{b}$$

Proyeksi skalar orthogonal \vec{a} pada \vec{b} adalah panjang vektor \vec{c}

$$|\vec{c}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

LATIHAN

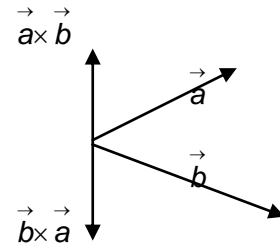
<p>1. Diketahui $\vec{a} = 3i + 2j - k$, $\vec{b} = 2i + 3j$, dan $\vec{c} = i - j + k$. Jika $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ dan $\vec{v} = \vec{b} + \vec{c}$. Tentukan proyeksi skalar orthogonal \vec{u} pada \vec{v}.</p>	<p>2. Diketahui $\vec{a} = i - 2j + 2k$ dan $\vec{b} = 3i + 2j - 6k$. Jika $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$. Tentukan proyeksi vektor orthogonal \vec{u} pada \vec{a}.</p>
<p>3. Proyeksi skalar orthogonal $\vec{a} = 2i - 6j + 3k$, dan $\vec{b} = mi - 2j - 4k$ adalah $4/3$. Tentukan nilai m.</p>	<p>4. Diketahui $P(-1,3,4)$, $Q(2,2,0)$, dan $R(2,-3,6)$. Tentukan proyeksi vektor orthogonal \overline{PQ} pada \overline{PR}</p>
<p>5. Diketahui titik $A(1,-2,3)$ dan vektor $\vec{c} = 2i - 6j + 3k$. Jika vektor \vec{c} melalui $B(0,2,-1)$, Tentukan jarak A dengan vektor \vec{c} ?</p>	

Perkalian Silang (Cross Product)

$\vec{a} \times \vec{b}$ adalah vektor yang tegak lurus \vec{a} dan tegak lurus \vec{b} menurut arah perputaran skrup.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\| \sin \alpha \cdot \vec{e}; \quad \alpha : \text{sudut antara } \vec{a} \text{ dan } \vec{b},$$

\vec{e} = vektor satuan yang searah $\vec{a} \times \vec{b}$



Bila $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ maka $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

Sifat-sifat perkalian silang dua vektor :

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

Latihan 6

1. Diketahui $\vec{a} = i - 2j + 2k$, dan $\vec{b} = 3i + 2j - 6k$. Tentukan $\vec{a} \times \vec{b}$.

2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, dan $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Tentukan $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

1. Besar sudut antara vector $\vec{a} = 2i + 3j + k$, dan $\vec{b} = 3i + 2j - 6k$. adalahderajat

- a. 30
- b. 45
- c. 60
- d. 90
- e. 120

2. Jika $\vec{a} = \sqrt{3}i + k$, dan $\vec{b} = \sqrt{3}j + 2k$. Maka $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \dots$

- a. 6
- b. 5
- c. 4
- d. 3
- e. 2

3. Diketahui $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, dan $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ Nilai $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \dots$

- a. $\sqrt{7}$
- b. $\sqrt{17}$
- c. 7
- d. 8
- e. $\sqrt{47}$

4. Jika $\vec{a} = 3i - 2j + k$ dan $\vec{b} = 2i + mj + 2k$. dan panjang proyeksi \vec{a} pada \vec{b} = setengah panjang \vec{b} . Nilai m =

- a. $2 - 2\sqrt{3}$ dan $2 + 2\sqrt{3}$
- b. $1 - 2\sqrt{3}$ dan $1 + 2\sqrt{3}$
- c. $-2 - 2\sqrt{3}$ dan $-2 + 2\sqrt{3}$
- d. $-4 - 2\sqrt{3}$ dan $-4 + 2\sqrt{3}$
- e. $4\sqrt{3}$ dan $4\sqrt{3}$

5. Bila α sudut antara $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ maka $\sin \alpha$ adalah

- a. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$
- b. $\frac{8}{21}\sqrt{5}$
- c. $\frac{3}{7}\sqrt{5}$
- d. $\frac{10}{21}\sqrt{5}$
- e. $\frac{11}{21}\sqrt{5}$

6. A(3,2,4) dan B(4,5,2) dan $\vec{AC} \perp \vec{OB}$. Jika \vec{c} adalah vector posisi titik C, maka \vec{c} adalah

a. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ d. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ e. $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

7. Diketahui $A(x,7,0)$, $B(6,10,-6)$ dan $C(1,9,0)$ agar $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, maka nilai $x =$.

- a. 3 atau 4
- b. -3 atau -4
- c. 3 atau -4
- d. -2 atau 6
- e. 2 atau 6

8. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Tentukan proyeksi scalar orthogonal $(\vec{b} + \vec{c})$ pada \vec{a} adalah

- a. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$
- b. $2\sqrt{2}$
- c. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
- d. $4\sqrt{3}$
- e. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

9. Diketahui $P(1,-2,-2)$ dan $Q(1,-2,6)$ Titik R terletak pada pQ sehingga $\overrightarrow{PR} : \overrightarrow{PQ} = 5 : 3$. Nilai dari $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ}$ adalah

- a. 31.
- b. 28
- c. 21
- d. 16
- e. 15

10. Koordinat titik berat segitiga ABC jika $A(-1,3,-5)$, $B(2,6,-7)$, dan $C(5,0,-6)$ adalah

- a. (2,3,-6)
- b. (2,5,3)
- c. (-2, -3,6)
- d. (1,2,3)
- e. (-3,2,6)

11. Jika $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = \sqrt{7}$ dan $\vec{b} \cdot \vec{a} = -2$ pasangan vector yang saling tegaklurus adalah

- a. $\vec{a} - 3\vec{b}$ dan $\vec{a} - \vec{b}$
 b. $\vec{a} + 3\vec{b}$ dan $\vec{a} - \vec{b}$
 c. $\vec{a} - 3\vec{b}$ dan $\vec{a} + \vec{b}$
 d. $3\vec{a} + \vec{b}$ dan $\vec{a} + \vec{b}$
 e. $3\vec{a} + \vec{b}$ dan $\vec{a} - \vec{b}$

12. Diketahui segitiga ABC dengan A(4,0,8), B(8,2,6) dan C(4,0,10). Nilai sinus sudut terbesar adalah

-
 a. $-\frac{1}{6}\sqrt{30}$
 b. $-\frac{1}{3}\sqrt{30}$
 c. $\frac{1}{6}\sqrt{30}$
 d. $\frac{1}{3}\sqrt{30}$
 e. $\frac{1}{30}\sqrt{30}$

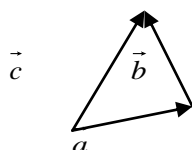
13. Diketahui $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Jika $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ dan $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ Proyeksi vector orthogonal \vec{u} dan \vec{v}

adalah

- a. $\frac{9}{16} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d. $\frac{5}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 b. $\frac{21}{19} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e. $\frac{19}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$
 c. $\frac{19}{15} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

14. Jika $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$ dan $|\vec{c}| = \sqrt{91}$ Maka nilai $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = \dots$

- a. 15
 b. 29
 c. 30,5
 d. 32
 e. 34,5



15. Segitiga ABC siku-siku di A jika $\vec{BC} =$

$2\vec{j} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ dan $\vec{AB} = x\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Nilai x adalah

- a. -2
 b. -1
 c. 1
 d. -2
 e. 3

c. Penutup

Bagaimana keadaan kalian sekarang?

Setelah kalian belajar bertahap dan berlanjut melalui kegiatan belajar 1 dan 2, berikut diberikan Tabel untuk mengukur diri kalian terhadap materi yang sudah kalian pelajari. Jawablah sejujurnya terkait dengan penguasaan materi pada UKBM ini di Tabel berikut.

Tabel Refleksi Diri Pemahaman Materi

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian telah memahami perbandingan ruas garis vektor?		
2.	Dapatkah kalian membedakan antara perbandingan vektor dengan titik bagi di dalam dan di luar?		
3.	Dapatkah kalian menentukan koordinat titik yang membagi ruas garis jika diketahui perbandingannya?		
4.	Apakah kalian telah memahami tiga titik yang segaris?		
5.	Apakah kalian telah memahami tiga vektor yang sebidang?		

Jika menjawab “TIDAK” pada salah satu pertanyaan di atas, maka pelajarilah kembali materi tersebut dalam Buku Teks Pelajaran (BTP) atau sumber lainnya dan pelajari ulang kegiatan belajar 1, 2, atau 3 yang sekiranya perlu kalian ulang dengan bimbingan Guru atau teman sejawat. **Jangan putus asa untuk mengulang lagi!**

Sukses untuk kalian!!!

